

Untersuchungen zur konstruktiven  
Begründung der  
Wahrscheinlichkeitstheorie

von  
Georg Weippert  
—  
aus  
Erlangen

1977 № 136



Digitized by the Internet Archive  
in 2026





# Untersuchungen zur konstruktiven Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen  
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur  
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt  
von  
**Georg Weippert**  
aus  
Erlangen

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen  
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 9.2.1977

|                                        |                           |
|----------------------------------------|---------------------------|
| Vorsitzender der Promotionskommission: | Professor Dr.E.Schweizer  |
| Erstberichterstatter:                  | Professor Dr.H.Bauer      |
| Zweitberichterstatter:                 | Professor Dr.P.Lorenzen   |
| Drittberichterstatter:                 | Professor Dr.K.Krickeberg |

## Inhaltsverzeichnis

### Einleitung

### Erster Teil - Maß- und Integrationstheorie

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| § 1. Mengensysteme                                                         | 6  |
| § 2. Inhalte, Prämaße und Maße                                             | 12 |
| § 3. Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß                               | 15 |
| § 4. Integrale meßbare Funktionen                                          | 24 |
| § 5. Meßbare Abbildungen und Bildmaße                                      | 30 |
| § 6. Fast überall bestehende Eigenschaften und stochastische<br>Konvergenz | 33 |
| § 7. Der Satz von Daniell-Stone                                            | 35 |
| § 8. Regularität endlicher Borel-Maße                                      | 41 |
| § 9. Maße mit Dichten                                                      | 48 |
| § 10. Schwache Konvergenz von Maßen                                        | 53 |
| § 11. Endliche Produktmaße                                                 | 55 |
| § 12. Kompakte Klassen und $\sigma$ -Additivität                           | 60 |
| § 13. Unendliche Produkte von Maßräumen                                    | 63 |

### Zweiter Teil - Wahrscheinlichkeitstheorie

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| § 14. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie | 68 |
| § 15. Unabhängige Ereignisse und Zufallsvariable   | 75 |
| § 16. Gesetz der großen Zahlen                     | 80 |

### Anhang 1

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| Einführung in die konstruktive Mathematik | 84 |
|-------------------------------------------|----|

### Anhang 2

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| Einführung in die Ordinalzahltheorie | 87 |
|--------------------------------------|----|

### Anhang 3

#### Topologische und metrische Räume

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| § 1. Grundlegende Definitionen | 90 |
| § 2. Metrische Räume           | 95 |



## Einleitung

Durch eine Arbeit von P.Lorenzen ( vergl.[9] S.209ff ) erfuhr das Problem der Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs eine Lösung durch die Einführung eines normativen Zufallsbegriffs, der es gestattet, von relativen Häufigkeiten zu Wahrscheinlichkeiten überzugehen. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, mit konstruktiven Mitteln einen mathematischen Rahmen zur Beschreibung der Operationen mit Zufallsgeneratoren wie z.B. Produktbildung oder bedingte Erwartungen zu beschaffen und die zur Begründung der Theorie wichtigen Sätze zu beweisen, z.B. über die Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen. Hierbei erfolgt keine Beschränkung auf den  $n$ - bzw.  $\infty$ -dimensionalen reellen Zahlenraum (was von den Anwendungen her vielleicht zu rechtfertigen wäre), sondern es wird versucht, möglichst allgemeine Strukturen anzugeben, mittels derer sich die oben erwähnten Operationen und Sätze beschreiben lassen.

Es wird der axiomatisch bewährte Weg, bei dem zuerst die Maß- und Integrationstheorie bereitgestellt wird und dann die Wahrscheinlichkeitstheorie als Spezialfall der normierten Maße interpretiert wird, jedenfalls insoweit beschritten, als der mathematische Formalismus der Wahrscheinlichkeitstheorie in die Maß- und Integrationstheorie eingebettet wird, wohingegen nicht jedes Modell der Kolmogoroff-Axiome auch ein Wahrscheinlichkeitsraum im Sinne Lorenzens ist. Diese Wahrscheinlichkeitsräume erfüllen neben den Kolmogoroff-Axiomen noch weitere Axiome. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß sich der Hauptteil der Arbeit mit Maß- und Integrationstheorie befaßt. Hier war es das Ziel, die axiomatisch bekannten Sätze in möglichst allgemeiner Form konstruktiv zu beweisen ( unabhängig von den späteren Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie ), um dem Leser zu zeigen, welche Möglichkeiten die konstruktive Mathematik bietet und wie ihre Arbeitsweise ist, d.h. wie man aus vorliegenden axiomatischen Beweisen konstruktive Beweise macht. Aus diesem Grunde

ist auch die Darstellung so eng wie möglich an die entsprechenden Beweise der Mathematik angelehnt, um durch direkten Vergleich die eventuellen Änderungen erkennen zu können.

Schon ein kurzer Blick auf die in Anhang 1 angegebenen Eigenschaften schwachdefiniter Mengen und Funktionen zeigt die Bedeutung der Begriffe für die konstruktive Mathematik. Eine ganze Reihe von Sätzen und Beweisen in dieser Arbeit sind dann auch dadurch entstanden, daß man von den in der axiomatischen Formulierung auftretenden Mengen und Funktionen verlangt, daß sie schwachdefinit sind, und <sup>man</sup> ansonsten den Satz, bzw. Beweis wörtlich übernimmt. Da dieses Verfahren vom konstruktiven Standpunkt aus nicht sehr interessant ist, wurde für die meisten Sätze dieser Art auf die Literatur verwiesen.

Insgesamt gesehen legt ein Vergleich der hier angegebenen Beweise mit denen der axiomatischen Mathematik vielleicht die Vermutung nahe, daß ~~xxx~~ jeder axiomatisch gegebene Beweis, so man ihn auf separable metrische Räume spezialisiert, schon ein konstruktiver Beweis ist, bzw. sich in einen solchen überführen läßt. Aber schon das in Anhang 3 § 1.16 diskutierte Ergebnis, daß Teilmengen separabler metrischer Räume im allgemeinen nicht mehr separabel zu sein brauchen, zeigt, daß man weitere Voraussetzungen machen muß. Außerdem gibt es keinen vollständigen Katalog von Beweisschritten der axiomatischen Mathematik ( im Idealfall geordnet nach dem Schwierigkeitsgrad), sodaß man sagen könnte, wenn der schwierigste Beweisschritt rekonstruierbar ist, so auch der ganze Beweis. Es sind nämlich gerade die tiefliegenden Sätze der Analysis, die immer wieder neue Beweisideen in die Theorie einbringen, die dann auf ihren konstruktiven Gehalt hin überprüft werden müssen.

Natürlich lassen sich viele der hier angegebenen Sätze (speziell der Anhänge 1 und 3 ) auch in anderen Situationen als Maß- oder Wahrscheinlichkeitstheorie verwenden und es war das Ziel in Anhang 1 und 3, die Behandlung möglichst allgemein zu halten, aber einen allgemeinen Satz, der die Rekonstruierbarkeit der axiomatischen Sätze bei Spezialisierung auf separable metrische Räume sichert, ist nicht zu erwarten.

Es sei in diesem Zusammenhang vielleicht noch auf § 3 verwiesen, in dem ein Prämaß  $\mu$  auf einem Ring  $\mathcal{R}$  zu einem Maß auf der von  $\mathcal{R}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{E}(\mathcal{R})$  fortgesetzt wird ohne die Zuhilfenahme des äußeren Maßes, das konstruktiv im allgemeinen nicht existiert. Spezialisiert man dieses Ergebnis auf die Situation  $\mathcal{R} := \mathcal{C}^n$  (Ring der  $n$ -dimensionalen Figuren in  $\mathbb{R}^n$ ) und  $\mu := \lambda^n$  (Lebesguesches Prämaß auf  $\mathcal{R}$ ), so existiert das zu  $\mu$  gehörige äußere Maß auch nicht und der Beweis kann nicht wie üblich geführt werden. Erst durch eine andere (schärfere Forderungen stellende) Definition der Meßbarkeit (§ 3.7) läßt sich die Existenz der Fortsetzung zeigen.

Bei der gesamten Entwicklung wurde auf explizite Sprachschichtkonstruktionen, wie sie in [8] beschrieben sind, verzichtet, vielmehr wurde ein Begriffsapparat verwendet, wie er in [7] aufgebaut ist (und dessen wichtigste Merkmale in Anhang 1 dieser Arbeit aufgeführt sind). Dies ermöglicht eine Darstellung des gesamten Stoffes der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, die dem technischen und begrifflichen Niveau der axiomatischen Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie voll und ganz entspricht. Welche Auswirkungen die Wahl der "richtigen" Begriffe auf die gesamte Ausarbeitung der Maßtheorie hat, kann man durch Vergleich mit [16] feststellen.

Um dem Leser das Umdenken von der einen Darstellung in die andere zu ersparen und zu zeigen, wie ertragreich die hier gewählten Begriffe sind, wurden in diese Arbeit eine Reihe von Sätzen und deren Beweise aufgenommen, zu denen in [16] schon konstruktive Beweise vorliegen. Somit entstand eine vollständige Entwicklung der Maß- und Integrations-theorie, die zudem den Vorteil hat, daß man leicht kontrollieren kann, ob die Theorie wirklich lückenlos ist. Da auch in [16] die Beweise durch [1] inspiriert wurden, wurde also fast ausschließlich gleich auf [1] verwiesen.

In § 1 sind vom konstruktiven Standpunkt die Definitionen 1, 7 und 12 besonders interessant. Die Konstruktion der von einem Mengensystem erzeugten  $\sigma$ -Algebra erfolgt in § 1.14, während § 1.16 den Zusammenhang mit der axiomatischen Darstellung herstellt. Hierdurch wird eine Lücke in der Konstruk-

tiven Mathematik geschlossen, denn die Behandlung der von einem Mengensystem erzeugten  $\sigma$ -Algebra in [16] 5.21 ist zu ungenau.

In § 2 beachte man die Definition eines  $\sigma$ -additiven Inhalts ( § 2.1 ) und für später die Definition 10 eines definiten Maßraumes.

§ 3 ist für die weitere Diskussion grundlegend und zeigt ganz deutlich die Einflüsse der konstruktiven Mathematik. ganz ähnliche axiomatische Beweise findet man in [11] § 7, während eine Darstellung wie in [1] § 5 nicht gewählt werden konnte, da dort zur Definition der meßbaren Mengen das äußere Maß benutzt wird.

Der Schlüssel zu den §§ 4 - 6 liegt in den Bemerkungen § 4.2.b) und § 4.12 . Auf Grund dieser Bemerkungen können die Beweise der in den §§ 4 - 6 nur der Vollständigkeit halber zitierten Sätze direkt aus [1] übernommen werden. Ausführliche konstruktive Beweise findet man in [16] .

In § 7 machen sich die Ergebnisse des § 3 auf die Darstellung deutlich bemerkbar, obwohl auch hier große Teile der Beweise genauso wie in [1] angelegt sind.

§ 8 ist von größter Bedeutung für die in § 14 angegebene Definition eines konstruktiven Wahrscheinlichkeitsraumes. Obwohl die Darstellung aus § 41 in [1] hätte übernommen werden können, wurde doch auf [15] zurückgegriffen, um besser auf die auftretenden Probleme hinweisen zu können.

In § 9 sieht man wieder deutlich, wie sich die Behandlung des Supremums in der konstruktiven Mathematik auf die axiomatischen Beweise auswirkt. Satz § 9.8 liefert die Grundlage zu der hier allerdings nur ganz kurz angedeuteten Theorie der bedingten Erwartungen.

Für § 10 wurde als Literatur [13] verwendet, da die Behandlung der schwachen Konvergenz von Maßen in [1] nicht auf separablen metrischen Räumen geschieht.

In § 11 sind wieder die Auswirkungen von § 3 bei der Darstellung zu spüren. Ähnliche konstruktive Beweise findet man in [16] .

Die Entwicklung der §§ 12 und 13 folgt [12] , da die in [1] § 33 angegebenen Beweise für die konstruktive Mathematik als nicht geeignet erscheinen. Vom konstruktiven Standpunkt

aus interessant dürfte auch die Bemerkung § 13.6 über die Definition und Existenz von unendlichen Produkten sein.

In § 14 wird im Anschluß an [9] die Frage diskutiert, wie man Wahrscheinlichkeit definiert und welche Räume in der konstruktiven Wahrscheinlichkeitstheorie auftreten. Hierbei wird von Sätzen aus den §§ 9, 10 und 13 und Anhang 3, § 2 Gebrauch gemacht, wodurch sich diese im Nachhinein als besonders wichtig herausstellen.

In § 15 wird der zentrale Begriff der Unabhängigkeit in die mathematische Theorie eingeführt und eine Reihe von Sätzen als Vorbereitung auf § 16 bewiesen, wieder in enger Anlehnung an [1].

In § 16 wird die für die Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie so entscheidende Frage nach der Gültigkeit des (starken) Gesetzes der großen Zahlen behandelt, obwohl die angegebenen Beweise sich nicht von denen der axiomatischen Mathematik, etwa [1] §36 und 37, unterscheiden.

Beigefügt sind noch drei Anhänge, in denen Begriffe und Sätze aufgeführt werden, die nicht zur Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie gehören, für den hier gegebenen Aufbau aber entscheidend sind.

Anhang 1 ist in der Hauptsache dem Begriff der schwachdefinierten Menge und der Existenz von Suprema nicht leerer beschränkter Mengen reeller Zahlen gewidmet, da dies z.B. in § 3 (vergl. § 3.17) und § 9 von Bedeutung ist.

Anhang 2 bringt eine ganz kurze Beschreibung der Einführung ( abzählbarer ) Ordinalzahlen, wobei auf Beweise fast völlig verzichtet werden konnte, da diese ohne Schwierigkeit aus [4] entnommen werden können. Die hier gewählte Darstellung ist wie in [4] eine mengentheoretische, während von konstruktiven Standpunkt aus eine Darstellung mittels halbformaler Disloge angebracht wäre ( wie man sie etwa in [10] angedeutet findet). die aber für Mathematiker etwas ungewohnt ist.

In Anhang 3 werden alle benötigten topologischen Hilfsmittel (zumeist im Anschluß an [6] ) zur Verfügung gestellt.

## Erster Teil: Maß- und Integrationstheorie

§ 1. Mengensysteme

Sei  $\Omega$  definite oder indefinite Menge.

1. Definition:

a) Eine (definite oder indefinite) Menge  $\mathcal{R}$  heißt ein Mengensystem in  $\Omega$ , wenn zwischen den Punkten  $\omega \in \Omega$  und den Elementen  $r \in \mathcal{R}$  eine Relation  $\tau$  besteht, für die gilt: Für je zwei Elemente  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  ist  $r_1 = r_2$ , falls  $\omega \tau r_1 \Leftrightarrow \omega \tau r_2$  für jedes  $\omega \in \Omega$ .

b) Ein Mengensystem  $\mathcal{R}$  in  $\Omega$  heißt ein Ring in  $\Omega$ , wenn gilt:

1) Für je zwei Elemente  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  existiert ein  $r \in \mathcal{R}$ , sodaß für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt  $\omega \tau r \Leftrightarrow (\omega \tau r_1 \vee \omega \tau r_2)$ .

2) Zu je zwei Elementen  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  existiert ein  $r \in \mathcal{R}$ , sodaß für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt:  $\omega \tau r \Leftrightarrow \omega \tau r_1 \wedge \neg(\omega \tau r_2)$ .

Gilt zusätzlich noch

3) Es existiert ein  $r \in \mathcal{R}$ , sodaß  $\omega \tau r$  für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt, so heißt  $\mathcal{R}$  eine Algebra.

Erfüllt  $\mathcal{R}$  neben 2) noch

4) Zu jeder definiten Folge  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{R}$  existiert ein  $r \in \mathcal{R}$ , sodaß für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt:  $\omega \tau r$  genau dann, wenn ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit  $\omega \tau r_n$ ;

so heißt  $\mathcal{R}$  ein  $\sigma$ -Ring.

Sind 2) bis 4) erfüllt, so heißt  $\mathcal{R}$   $\tau$ -Algebra.

c) Ein Mengensystem  $\mathcal{X}$  in  $\Omega$  heißt ein Halbring in  $\Omega$ , wenn gilt:

1) Zu je zwei Elementen  $h_1, h_2 \in \mathcal{X}$  existiert ein  $h \in \mathcal{X}$ , sodaß für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt:  $\omega \tau h \Leftrightarrow (\omega \tau h_1 \wedge \omega \tau h_2)$ .

2) Zu je zwei Elementen  $h, h' \in \mathcal{X}$  existieren  $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{X}$ , sodaß für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt:  $\omega \tau h \wedge \neg(\omega \tau h')$ , falls genau ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  existiert mit  $\omega \tau h_i$ . (Die  $h_n$  sind also disjunkt.) Gilt zusätzlich noch

3) Es existiert ein  $h \in \mathcal{X}$  mit  $\omega \tau h$  für alle  $\omega \in \Omega$ , so heißt  $\mathcal{X}$  Halbalgebra.

2. Bemerkung:

a) Diese etwas artifiziell wirkende Definition wurde gewählt, um darauf hinzuweisen, daß man von den Definitionsmitteln der Mengen eines Mengensystems nicht unbedingt auf die Definitionsmittel des Mengensystems schließen kann und umgekehrt. Geht man von  $r \in \mathcal{R}$  zu  $R := \{\omega \in \Omega : \omega \tau r\}$  über, so bekommt man

die übliche Sprechweise, die wir fast immer verwenden wollen, wobei  $R$  im allgemeinen keine definite Menge ist.

b) Die Definition eines Mengensystems  $\mathcal{Q}$  in  $\Omega$  ergibt sich aus der üblichen Anschauung über die Gleichheit zweier Mengen.  $r \in \mathcal{Q}$  sei hierbei nichtleer, wenn ein  $\omega \in \Omega$  existiert mit  $\omega \tau r$ .

c) In 1.b)4) wird gefordert, daß die Folgen  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit sind. Dies hat zwei Gründe. Zum einen muß bei der Definition der  $\sigma$ -Additivität von Maßen eine definite reelle Folge entstehen (vergl. §2.1), zum anderen kann man bei der von einem Mengensystem  $\mathcal{Q}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q})$  nur für definite Folgen in  $\mathcal{Q}_c(\mathcal{Q})$  zeigen, daß auch die Vereinigung in  $\mathcal{Q}_c(\mathcal{Q})$  liegt. Dies hat seinen Grund in der konstruktiven Ordinalzahltheorie (vergl. 13.c) und Anhang 2).

d) Ein Mengensystem  $\mathcal{Q}$  in  $\Omega$  ist genau dann eine  $\sigma$ -Algebra (bzw. Algebra), wenn (in Mengenschreibweise)

1)  $\Omega \in \mathcal{Q}$ ;

2)  $R \in \mathcal{Q} \Rightarrow \bigcup R \in \mathcal{Q}$ ;

3) Für jede definite (endliche) Folge  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Mengen aus  $\mathcal{Q}$  liegt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$  in  $\mathcal{Q}$ .

Das folgende Beispiel zeigt, warum es günstig ist, sich bei der Definition eines Mengensystems in  $\Omega$  nicht auf die  $\tau$ -Relation zu beschränken. Ein weiteres Beispiel hierfür findet man in §4.3.b).

### 3. Beispiel:

Sei  $\Omega := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

$\mathcal{I} := \{ (p, q) : p, q \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \}$ .

Seien  $\omega \in \Omega$  und  $I = (p_0, q_0) \in \mathcal{I}$ , dann wird die Relation  $\tau$  definiert durch  $\omega \tau I \Leftrightarrow p_0 \leq \omega < q_0$ .

$\mathcal{I}$  ist ein definiter Halbring. Er heißt Halbring der Elementarintervalle in  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

### 4. Satz:

Sei  $\mathcal{X}$  ein Halbring (bzw. Halb-algebra) in  $\Omega$ . Dann ist die (definite oder indefinite) Menge  $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$  (bzw.  $\mathcal{Q}(\mathcal{X})$ ) aller endlichen Vereinigungen disjunkter Mengen aus  $\mathcal{X}$  ein Ring bzw. Algebra.

Beweis: (für Algebra, aber für Ring analog, vergl. [2], 1.5.6)

a)  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{Q}(\mathcal{X})$ , da  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{X}$ .

b) Seien  $\bigcup_{i=1}^m A_i, \bigcup_{j=1}^n B_j \in \mathcal{Q}(\mathcal{X})$  und

$C_{ij} := A_i \cap B_j \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$

Dann ist  $C_{ij} \cap C_{kl} = \emptyset$  für  $i \neq k$  oder  $j \neq l$

und  $\bigcup_{i=1}^m A_i \cap \bigcup_{j=1}^n B_j = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n C_{ij}$ .

c) Da  $\Omega \in \mathcal{O}(\mathcal{X})$ , genügt es zu zeigen:  $A \in \mathcal{O}(\mathcal{X}) \Rightarrow \bigcup_j A \in \mathcal{O}(\mathcal{X})$ .

Sei also  $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{O}(\mathcal{X})$ , dann ist  $\bigcap_{i=1}^m \left( \bigcup_{j=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^m A_i$ .

Da  $\mathcal{X}$  Halb-algebra ist, gilt aber  $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{X}$ .

### 5. Bemerkung:

a)  $\mathcal{X}$  heißt das Erzeugendensystem von  $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  bzw.  $\mathcal{I}(\mathcal{X})$  und  $\mathcal{R}(\mathcal{X})$  bzw.  $\mathcal{O}(\mathcal{X})$  heißt der von  $\mathcal{X}$  erzeugte Ring bzw. die von  $\mathcal{X}$  erzeugte Algebra.  $\mathcal{R}(\mathcal{X})$  ist der kleinste Ring, der  $\mathcal{X}$  enthält, denn jeder solche Ring muß alle endlichen Vereinigungen von Elementen aus  $\mathcal{X}$  enthalten, also erst recht die endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter Elemente aus  $\mathcal{X}$ . Analoges gilt für  $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ .

b) Sei  $\Omega := \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $\mathcal{I}^n$  der Halbring der Elementarintervalle. Der von  $\mathcal{I}^n$  erzeugte definite Ring  $\mathcal{F}^n := \mathcal{R}(\mathcal{I}^n)$  heißt der Ring der  $n$ -dimensionalen Figuren.

c) Auch für Mengensysteme  $\mathcal{M}$  in  $\Omega$ , die keine Halbringe sind, kann man einen kleinsten Ring  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  bzw. eine kleinste Algebra  $\mathcal{O}(\mathcal{M})$  finden, die  $\mathcal{M}$  enthält.  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  bzw.  $\mathcal{O}(\mathcal{M})$  heißt dann wieder von  $\mathcal{M}$  erzeugt. Wir führen die Konstruktion im Anschluß an [12] im nächsten Satz durch.

### 6. Satz:

Sei  $\mathcal{M}$  ein Mengensystem in  $\Omega$ . Dann existiert ein kleinster  $\mathcal{M}$  umfassender Ring bzw. eine kleinste  $\mathcal{M}$  umfassende Algebra..

Beweis: (für Algebra, vergl. [12] I.2.2)

$\mathcal{M}_1 := \{A \in \Omega \text{ wobei entweder } A \text{ oder } \{A \in \mathcal{M}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\Omega\};$

$\mathcal{M}_2$  sei die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus  $\mathcal{M}_1$ ;

$\mathcal{M}_3$  sei die Menge aller endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{M}_2$ .

Dann gilt:  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_3$ .

a)  $\mathcal{M}_3$  ist stabil bezüglich endlicher Durchschnitte, denn seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_3$ . Jedes  $A_i$  hat die Form  $A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}$ , wobei  $\{B_{ij} : j \in J_i\}$  für jedes  $i=1, \dots, n$  eine endliche Familie paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{M}_2$  ist.

Dann ist  $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j \in J_i} B_{ij} = \bigcup_{(j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \dots \times J_n} B_{1j_1} \cap \dots \cap B_{nj_n} \in \mathcal{M}_3$ ,  
da  $\mathcal{M}_2$  stabil bezüglich endlicher Durchschnitte ist.

b)  $\mathcal{M}_3$  ist stabil bezüglich Komplementbildung, denn sei  $A := \bigcup_{i=1}^n B_i$  ( $B_i \in \mathcal{M}_2$  paarweise disjunkt) eine Menge aus  $\mathcal{M}_3$ .

Dann ist  $\bigcup A = \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$ . Wegen Teil a) ist dann  $\bigcup A \in \mathcal{M}_3$ ,  
denn es gilt allgemein:  $B \in \mathcal{M}_2 \Rightarrow B \in \mathcal{M}_3$ , weil mit der Darstellung  $B := \bigcap_{i=1}^n C_i$  ( $C_i \in \mathcal{M}_1$ ) gilt:

$\bigcup B = \bigcup_{i=1}^n C_i$ , wobei  $C_i := C_i$  oder  $\bigcup C_i$  und die Vereinigung über alle Kombinationen gebildet wird, mit Ausnahme von  $C_i = C_i$  für jedes  $i=1, \dots, n$ . Da aber jedes  $C_i$  in  $\mathcal{M}_1$  liegt, ist  $\bigcup C_i$  eine Menge aus  $\mathcal{M}_2$  wegen der Definition von  $\mathcal{M}_2$ .

Um mit definiten Folgen (z.B. in einem Ring) wie üblich rechnen zu können, benötigen wir noch folgende

#### 7. Definition:

Sei  $\mathcal{M}$  ein Mengensystem in  $\Omega$  mit zugehöriger Relation  $\tau$ .

$\mathcal{M}$  heißt ordnungsdefinit, wenn die Relation  $A \leq B$ , definiert durch  $\omega \tau A \Rightarrow \omega \tau B$  für jedes  $\omega \in \Omega$  definit ist bei beliebiger Wahl von Mengen  $A, B \in \mathcal{M}$ .

#### 8. Beispiel:

Der Halbring der Elementarintervalle in  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist ordnungsdefinit, da sich die Ordnung mit Hilfe von rationalen Zahlen darstellen läßt.

#### 9. Bemerkung:

a) Sei  $\mathcal{M}$  ordnungsdefinites Mengensystem und  $A, B \in \mathcal{M}$ .

Dann ist  $A \cap B = \emptyset$  definit.

b) Ist  $\mathcal{M}$  definites und ordnungsdefinites Mengensystem, so ist auch  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  bzw.  $\mathcal{C}(\mathcal{M})$  definit und ordnungsdefinit.

#### 10. Hilfssatz:

Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in einem ordnungsdefiniten Ring  $\mathcal{R}$ .  
Dann kann  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  auch als Vereinigung einer definiten Folge paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{R}$  geschrieben werden.

#### Beweis:

Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{R}$ . Dann setze man

(\*)  $B_1 := A_1$  und  $B_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$  für  $n \geq 2$ .

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $B_n \in \mathcal{R}$ , da  $\mathcal{R}$  abgeschlossen bezüglich endlicher Vereinigungen und Differenzen.

Weiterhin gilt für  $n \in \mathbb{N}$   $B_n = A_n$  und  $B_m \cap A_n = \emptyset$  ( $m > n$ ) und somit  $B_m \cap B_n = \emptyset$ . Also ist  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge paarweise disjunkter Mengen in  $\mathcal{Q}$ .

Sei nun  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $n$  der kleinste Index mit  $x \in A_n$ .

Dann ist  $x \notin A_k$  für  $k < n$  und somit  $x \in B_n$ , was  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  zur Folge hat. Die Umkehrung wurde oben schon gezeigt.

### 11. Bemerkung:

Ist insbesondere  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite aufsteigende Folge in  $\mathcal{Q}$ , so geht (\*) über in

$B_1 = A_1$  und  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$  für  $n \geq 2$  und es gilt  $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$ .

Im folgenden wird gezeigt, wie man aus einem Mengensystem  $\mathcal{M}$  eine  $\mathcal{M}$  enthaltende  $\sigma$ -Algebra konstruiert.

### 12. Definition:

Sei  $\mathcal{M}$  ein definites oder indefinites Mengensystem in  $\Omega$ , das  $\emptyset$  enthält. Eine Teilmenge  $A$  von  $\Omega$  gehört zu der von  $\mathcal{M}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{M})$ , wenn es eine abzählbare Ordinalzahl  $\mu = \mu_A$  gibt und eine definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ , wobei (\*) für jedes  $n \in \mathbb{N}$  entweder  $A_n$  oder  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{M})$  und die zugehörige Ordinalzahl  $\gamma_n < \mu$  ist.

Ist  $\mu = 1$ , so sei für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $A_n$  oder  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{M}$ .

### 13. Bemerkung:

a) Ist für jedes  $A \in \mathcal{M}$   $\mu_A = 0$ , so ist  $\mathcal{M}$  schon  $\sigma$ -Algebra.

b) Die zu  $A \in \mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{M})$  gehörige Ordinalzahl  $\mu_A$  braucht nicht minimal mit der Eigenschaft (\*) zu sein. Hat man umgekehrt ein  $\mu$  mit (\*) gefunden, so kann man auch jede Ordinalzahl  $\gamma < \mu$  als zu  $A$  gehörige annehmen.

c) Die Beschränkung auf definite Folgen ist durch die späteren Anwendungen in der Maßtheorie motiviert (vergl. §2) und wegen der Anwendung von Satz 12 aus Anhang 2 sogar notwendig zum Beweis von Eigenschaft 14.c).

d)  $\mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{M})$  ist im allgemeinen indefinit, selbst wenn  $\mathcal{M}$  definit ist. Ist aber z.B.  $\mathcal{M} = \{\emptyset, A\}$ , wobei  $A$  beliebige Teilmenge von  $\Omega$  ist, so ist  $\mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{M}) = \{\emptyset, A, \bigcup_{i=1}^n A_i, \Omega\}$ .

Es bleibt zu zeigen, daß  $\mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{M})$  tatsächlich eine  $\sigma$ -Algebra ist, die in jeder anderen  $\mathcal{M}$  enthaltenden  $\sigma$ -Algebra liegt.

### 14. Eigenschaften von $\mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{M})$ :

a)  $\Omega \in \mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{M})$ , denn sei  $\mu = 1$  und  $A_1 := \emptyset$  und  $A_n := \emptyset$  für  $n \geq 2$ . Dann ist  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $\gamma_n = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Mit  $A \in \mathcal{O}_C(\mathcal{M})$  ist auch  $\bigcup A \in \mathcal{O}_C(\mathcal{M})$ .

Sei  $\mu$  die zu  $A$  gehörige Ordinalzahl und  $A_n := A$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Ist dann  $\gamma$  eine Ordinalzahl  $> \mu$  (z.B.  $\gamma = \mu + 1$ ), so leisten  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\gamma$  das Verlangte, denn  $\bigcup A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $\gamma_{A_n} = \mu$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

c) Für jede definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{O}_C(\mathcal{M})$  ist  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{O}_C(\mathcal{M})$ . Sei hierzu  $\gamma_n$  die zu  $A_n$  gehörige Ordinalzahl.

Dann ist  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge von Ordinalzahlen, die wegen Satz 12 aus Anhang 2 als definite aufsteigende Folge angenommen werden kann.

Sei  $\zeta$  die nach Satz 12 aus Anhang 2 existierende Ordinalzahl mit  $\gamma_n < \zeta$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann leisten  $\zeta$  und  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  das Verlangte.

d) Sei  $\mathcal{O}_C$ -Algebra mit  $\mathcal{M} \in \mathcal{O}_C$ , dann gilt  $\mathcal{O}_C(\mathcal{M}) \in \mathcal{O}_C$ .

Beweis durch transfinite Induktion:

Sei  $A \in \mathcal{O}_C(\mathcal{M})$  mit zugehöriger Ordinalzahl 0. Dann ist  $A \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}_C$ .

Sei  $\mu_0$  beliebige Ordinalzahl und für  $B \in \mathcal{O}_C(\mathcal{M})$  mit  $\mu_B < \mu_0$ .  $B \in \mathcal{O}_C$  schon gezeigt. Ist dann  $A \in \mathcal{O}_C(\mathcal{M})$  mit zugehöriger Ordinalzahl  $\mu_0$  und definiter Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ , so gilt  $\gamma_n < \mu_0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , also nach Induktionsannahme  $A_n$  oder  $\bigcup A_n \in \mathcal{O}_C$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Somit liegt  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  in  $\mathcal{O}_C$ , da  $\mathcal{O}_C$ -Algebra ist.

#### 15. Beispiel:

Sei  $\mathcal{I} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $\mathcal{I}^n$  der Halbring der Elementarintervalle. Dann heißt  $\mathcal{B}^n := \mathcal{O}_C(\mathcal{I}^n)$  die  $\mathcal{O}_C$ -Algebra der Borelschen Mengen.

#### 16. Bemerkung:

Diese Darstellung der von einem Mengensystem  $\mathcal{M}$  erzeugten  $\mathcal{O}_C$ -Algebra ist auch axiomatisch üblich (vergl. [3], S. 133 und [11] Anhang). Die axiomatisch elegantere Methode mit Hilfe des Durchschnitts aller  $\mathcal{O}_C$ -Algebren, die  $\mathcal{M}$  umfassen, ist konstruktiv nicht möglich, da die Existenz einer  $\mathcal{M}$  umfassenden  $\mathcal{O}_C$ -Algebra durch die Potenzmenge von  $\mathcal{M}$  gezeigt wird, die konstruktiv im allgemeinen nicht definierbar ist und außerdem eine Darstellung aller  $\mathcal{M}$  umfassenden  $\mathcal{O}_C$ -Algebren fehlt.

## § 2. Inhalte, Prämaße und Maße

Sei  $\Omega$  definite oder indefinite Menge.

### 1. Definition:

a) Sei  $\mathcal{X}$  ein Halbring in  $\Omega$ . Eine schwachdefinite numerische Abbildung  $\mu$  auf  $\mathcal{X}$  heißt ein Inhalt, wenn gilt:

$$1) \mu(\emptyset) = 0;$$

$$2) \mu(A) \geq 0 \text{ für jedes } A \in \mathcal{X};$$

$$3) \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ für beliebige } A, B \in \mathcal{X} \text{ mit } A \cap B = \emptyset.$$

Gilt an Stelle von 3) sogar

3') für jede definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{X}$  mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$  gilt  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ , so heißt  $\mu$   $\sigma$ -additiver Inhalt.

b) Ist  $\mathcal{X}$  sogar ein Ring und gilt a) 1), 2), 3'), so heißt  $\mu$  ein Prämaß.

c) Ist  $\mathcal{X}$  in der Situation von b) sogar  $\sigma$ -Ring, so heißt  $\mu$  ein Maß.

### 2. Bemerkung:

a) Ist eine Mengenfunktion  $\mu$  auf einem Halbring  $\mathcal{X}$  mit definiertem Erzeugendensystem  $\mathcal{E}$  definit auf  $\mathcal{E}$ , so ist  $\mu$  schwachdefinit auf  $\mathcal{X}$ .

b) Ein Inhalt  $\mu$  auf einem Halbring  $\mathcal{X}$  muß schwachdefinit sein aus folgendem Grund: Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{X}$ , so muß man für die  $\sigma$ -Additivität wissen, daß  $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge reeller Zahlen ist (wobei auch  $+\infty$  als Wert vorkommen darf). Ist  $\mu$  schwachdefinit, so ist dies gesichert.

c) Jeder Inhalt  $\mu$  auf einem Ring  $\mathcal{R}$  hat die folgenden Eigenschaften, die man wie üblich beweist.

(Seien hierzu  $A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ .)

$$1) \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B);$$

$$2) \mu(A) \leq \mu(B), \text{ falls } A \subseteq B \quad \text{"Monotonie"};$$

$$3) \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A), \text{ falls } A \subseteq B, \mu(A) < +\infty \quad \text{"Subtraktivität"};$$

$$4) \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \quad \text{"Subadditivität"};$$

5) Für jede definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise diskjuncter Mengen aus  $\mathcal{R}$  mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$  gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ .

d) Ist  $\mathcal{X}$  Mengensystem in  $\Omega$ ,  $\mu$  schwachdefinite numerische Abbildung auf  $\mathcal{X}$  und gilt 1.a) 3'), so heißt  $\mu$   $\sigma$ -additiv.

3. Beispiel:

a) Sei  $\mathcal{I}^n$  der definite und ordnungsdefinite Halbring der Elementarintervalle in  $\mathbb{R}^n$ .

Seien  $p=(p_1, \dots, p_n)$ ,  $q=(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{Q}^n$ .

Dann wird auf  $\mathcal{I}^n$  ein Inhalt  $\lambda$  definiert durch

$$\lambda((p, q)) := (p_1 - q_1) \cdot \dots \cdot (p_n - q_n).$$

Er heißt der  $n$ -dimensionale Elementarinhalt.

Wie üblich zeigt man, daß  $\lambda$  sogar ein Prämaß auf dem Ring  $\mathcal{R}(\mathcal{I}^n)$  der  $n$ -dimensionalen Figuren ist (vergl. [16] 4. 10).

b) Sei  $\mathcal{R}$  ein Ring in  $\mathcal{I}$  und sei die zugehörige Relation  $\tau$  schwachdefinit, dann ist die für  $\omega \in \mathcal{I}$  durch

$$\varepsilon_\omega(A) := \begin{cases} 1 & \omega \tau A \\ 0 & \neg \omega \tau A \end{cases} \quad (A \in \mathcal{R})$$

definierte Funktion ein Prämaß auf  $\mathcal{R}$ . ( $\varepsilon_\omega$  ist schwachdefinit, da  $\tau$  dies ist).

4. Satz: [1] 3.2

Für einen Inhalt  $\mu$  auf einem ordnungsdefiniten Ring  $\mathcal{R}$  betrachte man folgende Eigenschaften:

a)  $\mu$  ist ein Prämaß;

b) Für jede definite isotone Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{R}$  mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$  "Stetigkeit von unten";

c) Für jede definite antitone Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{R}$  mit  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$  und  $\mu(A_n)^{<+\infty}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$  "Stetigkeit von oben";

d) Für jede definite antitone Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{R}$  mit  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$  und  $\mu(A_n)^{<+\infty}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$  "0-Stetigkeit";

Dann gilt: a)  $\Leftrightarrow$  b)  $\Rightarrow$  c)  $\Rightarrow$  d).

Ist  $\mu$  auf  $\mathcal{R}$  endlich (d.h.  $\mu(A)^{<+\infty}$  für jedes  $A \in \mathcal{R}$ ), so ist

a) bis d) sogar quivalent.

Beweis:

Mit Hilfssatz 10 aus §1, in dem die Ordnungsdefinitheit verwendet wird, zeigt man die Behauptung wie üblich.

5. Definition:

Ein Inhalt  $\mu$  auf einem Ring  $\mathcal{R}$  in  $\mathcal{I}$  heißt  $\sigma$ -endlich, wenn eine definite isotone Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{R}$  existiert mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathcal{I}$  und  $\mu(A_n)^{<+\infty}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Bemerkung:

- a) Ein Inhalt  $\mu$  auf einem ordnungsdefiniten Ring  $\mathcal{R}$  in  $\Omega$  ist genau dann  $\sigma$ -endlich, wenn eine definite Folge  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise fremder Mengen aus  $\mathcal{R}$  existiert mit  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  und  $\mu(B_n) < +\infty$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dies folgt aus Hilfssatz 10 in §1.
- b) In den späteren Anwendungen werden häufig Halbringe  $\mathcal{X}$  auf natürliche Weise als Definitionsbereiche von  $\sigma$ -additiven Inhalten auftreten. Es besteht dann immer das Problem, diese Inhalte unter Beibehaltung ihrer Eigenschaften auf den von  $\mathcal{X}$  erzeugten Ring fortzusetzen. Diese Aufgabe wird in den nächsten beiden Sätzen allgemein gelöst. Die Beweise sind Standardbeweise der axiomatischen Mathematik, die unter Beachtung der Ordnungsdefinitheit wörtlich übernommen werden können.

7. Satz: [2] 2.3.1

Sei  $\mathcal{X}$  Halbring in  $\Omega$ ,  $\mu$  ein Inhalt auf  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{R}(\mathcal{X})$  der von  $\mathcal{X}$  erzeugte Ring. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Inhalt  $\nu$  auf  $\mathcal{R}(\mathcal{X})$ .  $\nu$  ist gegeben durch  $\nu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ , wobei  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  (mit paarweise disjunkten Mengen  $A_i \in \mathcal{X}$ ) eine beliebige Menge aus  $\mathcal{R}(\mathcal{X})$  ist.

8. Satz: [2] 2.3.2

Sei  $\mathcal{X}$  ein ordnungsdefiniter Halbring und  $\mu$  ein  $\sigma$ -additiver Inhalt auf  $\mathcal{X}$ . Dann ist die nach Satz 7 existierende Fortsetzung  $\nu$  von  $\mu$  auf  $\mathcal{R}(\mathcal{X})$  sogar ein Prämaß.

9. Bemerkung:

Analog zu Satz 7 und 8 zeigt man, daß ein  $\sigma$ -endlicher Inhalt auf einem Halbring  $\mathcal{X}$  auf genau eine Weise zu einem Prämaß auf der von  $\mathcal{X}$  erzeugten Algebra  $\mathcal{C}(\mathcal{X})$  fortgesetzt werden kann.

Ist der Inhalt  $\mu$  auf dem Halbring  $\mathcal{X}$   $\sigma$ -endlich, so ist die nach Satz 7 existierende Fortsetzung  $\nu$  auf  $\mathcal{R}(\mathcal{X})$  bzw.  $\mathcal{C}(\mathcal{X})$  ebenfalls  $\sigma$ -endlich.

10. Definition:

Ist  $\Omega$  schwachdefinite Menge und  $\mathcal{C}$  ordnungsdefinite  $\sigma$ -Algebra mit definitivem Erzeugendensystem, das nur schwachdefinite Mengen enthält, so heißt das Paar  $(\Omega, \mathcal{C})$  ein definiter Maßraum. Ist zusätzlich auf  $\mathcal{C}$  ein ( $\sigma$ -endliches) Maß  $\mu$  gegeben, so heißt das Tripel  $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$  ein ( $\sigma$ -endlicher) definiter Maßraum.

### § 3. Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß

Sei  $\Omega$  definite oder indefinite Menge,  $\mathcal{Q}$  ein definit und ordnungsdefinit Ring in  $\Omega$  und  $\mu_0$  ein  $\sigma$ -endliches Prämaß auf  $\mathcal{Q}$ .

bezeichne die im allgemeinen indefinite Menge aller Vereinigungen von definiten Folgen in  $\mathcal{Q}$ .

Die Fortsetzung von  $\mu_0$  geschieht in zwei Schritten. Im ersten wird  $\mu_0$  zu einer schwachdefiniten Mengenfunktion auf  $\mathcal{Q}_\sigma$  mit gewissen Eigenschaften fortgesetzt. Hierzu dient der folg.

#### 1. Hilfssatz:

Sei  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{Q}_\sigma$ , wobei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge paarweise disjunkter Mengen  $A_n \in \mathcal{Q}$  ist.

Dann gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) = \sup_{\substack{B \in \mathcal{Q} \\ B \subseteq A}} \mu_0(B)$

#### Beweis:

Sei  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{Q}_\sigma$  mit definiten Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen  $A_n \in \mathcal{Q}$ .

Dann gilt für alle  $B \in \mathcal{Q}$  mit  $B \subseteq A$ :  $B = A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B \cap A_n$ .

Da  $\mu_0$   $\sigma$ -additiv ist, folgt  $\mu_0(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$ , d.h.  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$  ist obere Schranke von  $\{\mu_0(B) : B \in \mathcal{Q} \text{ mit } B \subseteq A\}$ .

Sei jetzt  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  beliebig.

Dann existiert nach Definition von  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodaß für  $B := A_1 \cup \dots \cup A_{n_0}$  (also ist  $B \in \mathcal{Q}$  und  $B \subseteq A$ ) gilt:

$$\mu_0(B) = \mu_0(A_1) + \dots + \mu_0(A_{n_0}) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) - \varepsilon.$$

Da  $\mathcal{Q}$  definit und ordnungsdefinit ist, ist  $\{B \in \mathcal{Q} \text{ mit } B \subseteq A\}$  definit, also auch die Linksklasse von  $\{B \in \mathcal{Q} : B \subseteq A\}$ , woraus die Behauptung des Satzes folgt (vergl. Anhang 1).

#### 2. Bemerkung:

Da nach Hilfssatz 10 aus §1 jedes  $A \in \mathcal{Q}_\sigma$  als Vereinigung einer definiten Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter  $A_n \in \mathcal{Q}$  geschrieben werden kann (auch hier wird verwendet, daß  $\mathcal{Q}$  ordnungsdefinit ist), ist es wegen des vorigen Hilfssatzes 1 möglich  $\mu_0$  auf jedes  $A \in \mathcal{Q}_\sigma$  (unabhängig von der Darstellung durch  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) fortzusetzen durch folgende

#### 3. Definition:

(\*) Sei  $A \in \mathcal{Q}_\sigma$ ,  $\mu(A) := \sup_{\substack{B \in \mathcal{Q} \\ B \subseteq A}} \mu_0(B)$

4. Bemerkung:

a)  $\mu'$  ist schwachdefinite numerische Mengenfunktion auf  $\mathcal{Q}_\sigma$ , die auf  $\mathcal{Q}$  mit  $\mu_0$  übereinstimmt.

b) Wie man dem Beweis des Hilfssatzes 1 entnimmt, gilt für jedes  $A \in \mathcal{Q}_\sigma$  mit der Darstellung  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  mit definiter Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter  $A_n \in \mathcal{Q}$ :

$$(*) \quad \mu'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Ist allgemeiner  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  mit definiter Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht notwendig paarweise disjunkter  $A_n \in \mathcal{Q}$ , so gilt

$\times \mu'(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ , denn nach dem Hilfssatz 10 aus §1 läßt sich die Vereinigung auch als Vereinigung paarweise disjunkter  $A_n'$  darstellen. Somit gilt:

$$\mu'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n') = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(A_1' \cup \dots \cup A_n') = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

Zusammenfassend gilt der folgende

5. Satz:

Jedes Maß, welches das  $\sigma$ -endliche Prämaß  $\mu_0$  auf  $\mathcal{Q}$  fortsetzt, hat einen Definitionsbereich, der  $\mathcal{Q}_\sigma$  umfaßt, und für jedes  $A \in \mathcal{Q}_\sigma$  einen Wert  $\mu'(A)$ , der durch jede der obigen Gleichungen (\*) gegeben ist.

6. Bemerkung:

Die oben definierte Mengenfunktion  $\mu'$  hat folgende Eigenschaften:

a)  $\mu'(\emptyset) = 0$ ;

b)  $\mu'$  ist auf  $\mathcal{Q}_\sigma$   $\sigma$ -additiv;

c)  $\mu'$  ist auf  $\mathcal{Q}_\sigma$  isoton;

d) Für jede definite Folge  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Q}_\sigma$  gilt

$$\mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(R_n);$$

e) Für je zwei Mengen  $R, Q \in \mathcal{Q}_\sigma$  gilt

$$\mu'(Q) + \mu'(R) = \mu'(Q \cup R) + \mu'(Q \cap R).$$

Beweis:

b) Sei  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge paarweise disjunkter  $R_n \in \mathcal{Q}_\sigma$  mit  $R := \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ . Dann ist  $R \in \mathcal{Q}_\sigma$ .

Jedes  $R_n$  habe die Darstellung  $R_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{nm}$  mit definiter Folge  $(A_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  bezüglich des ersten Indexes paarweise disjunkter

$A_{nm} \in \mathcal{Q}$ . Da die  $R_n$  paarweise disjunkt sind, sind sogar alle  $A_{nm}$  paarweise disjunkt.

Sei  $(A_l)_{l \in \mathbb{N}}$  lineare Umordnung der  $A_{mn}$  (dies ist auf definite Weise möglich), dann gilt:

$$\mu'(R) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_0(A_l) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_0(A_{mn}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(R_n), \text{ weil } \mu_0$$

$\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{Q}$ .

d) Sei  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{Q}_G$ . Jedes  $R_n$  habe die Darstellung  $R_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{mn}$  mit definiter Folge  $(A_{mn})_{m \in \mathbb{N}}$  bezüglich des ersten Index paarweise disjunkter  $A_{mn} \in \mathcal{Q}$ .

Sei  $(A_l)_{l \in \mathbb{N}}$  lineare Umordnung der  $A_{mn}$ . Nach Hilfssatz 10 aus §1 kann  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$  als Vereinigung einer definiten Folge  $(A_l^1)_{l \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter  $A_l^1$  geschrieben werden, wobei  $A_l^1 \subseteq A_l$  für jedes  $l \in \mathbb{N}$  ist. Somit gilt:

$$\mu'(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_0(A_l^1) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu_0(A_l) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_0(A_{mn}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(R_n).$$

e) Seien  $Q, R \in \mathcal{Q}_G$ .

Ist dann  $\mu'(Q \cap R) = +\infty$ , so folgt die Behauptung aus c), denn  $Q \cap R \subseteq Q$  und  $Q \cap R \subseteq R$ .

Sei also  $\mu'(Q \cap R) < +\infty$  und  $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  mit definiten Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Q}$ . Dann gilt  $Q \cup R = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$  und somit

$$\mu'(Q \cup R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{i=1}^n B_i).$$

Da  $\mu_0$  ein Inhalt auf  $\mathcal{Q}$  ist, gilt (vergl. §2.2.c))

$$\mu'(Q \cup R) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu_0(\bigcup_{i=1}^n A_i) + \mu_0(\bigcup_{i=1}^n B_i) - \mu_0(\bigcup_{i,j=1}^n (A_i \cap B_j))].$$

Da der Subtrahend wegen der Voraussetzung und c) endlich ist, folgt die Behauptung.

Da  $\mathcal{Q}_G$  im allgemeinen keine  $\sigma$ -Algebra ist, muß  $\mu_0$  in einem zweiten Schritt noch einmal fortgesetzt werden (unter Verwendung von  $\mu'$  und  $(\mathcal{Q}_G)$  auf eine  $\mathcal{Q}$  umfassende  $\sigma$ -Algebra. Hierfür geeignete Objekte sind die meßbaren Mengen im Sinne der folgenden

## 7. Definition:

Eine Menge  $M$  in  $\mathcal{Q}$  heißt meßbar, wenn es definite Folgen  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}, (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Q}_G$  gibt mit  $C_n \cup M = B_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(C_n) = 0$ .

Dann sei definiert  $\mu(M) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu'(B_n)$ .

Für eine meßbare Menge heißen die zugehörigen Folgen  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Gerüst von  $M$ .

$\mathcal{M}$  sei die Menge aller meßbaren Mengen in  $\mathcal{Q}$ .

Diese Definition von  $\mu$  hängt nicht vom gewählten Gerüst ab, wie der nächste Satz zeigt.

**8. Satz:**

Seien  $M, N \in \mathcal{M}$  mit  $M \subseteq N$ . Dann gilt  $\mu(M) \leq \mu(N)$ .

**Beweis:**

Sei  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}, (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Gerüst von  $M$  und  $(B'_m)_{m \in \mathbb{N}}, (C'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ein Gerüst von  $N$ .

Dann gilt für alle  $m, n \in \mathbb{N}$

$B_n = C_n \cup M \subseteq C_n \cup N \subseteq C_n \cup B'_m$  und somit  $\mu'(B_n) \leq \mu'(C_n \cup B'_m) \leq \mu'(C_n) + \mu'(B'_m)$ , was zur Folge hat

$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu'(B_n) \leq \mu'(C_n) + \mu'(B'_m)$ . Somit gilt

$\mu(M) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(C_n) + \mu'(B'_m)$  und deshalb auch

$\mu(M) \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu'(B'_m) = \mu(N)$ .

**9. Bemerkung:**

Eine Teilmenge  $M$  von  $\Omega$  liegt in  $\mathcal{M}$  genau dann, wenn definite

Folgen  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}, (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Q}_\sigma$  existieren, sodaß für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $B_n \supseteq M$ ,  $B_n \setminus M \subseteq C_n$  und  $C_n \subseteq B_n$  gilt und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(C_n) = 0$ .

**10. Satz:**

$\mathcal{M}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{Q}_\sigma$  umfaßt (und daher auch  $\mathcal{Q}$ ).

**Beweis:**

a) Sei  $M \in \mathcal{Q}_\sigma$ , dann sind die konstanten Folgen  $(\emptyset)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(M)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Gerüst von  $M$ .

Also gilt  $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{Q}_\sigma \supseteq \mathcal{Q}$ .

Außerdem ist wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit von  $\mu_0$   $\Omega \in \mathcal{Q}_\sigma$ .

b) Sei  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{M}$ . Dann ist  $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \in \mathcal{M}$ , denn nach Voraussetzung existieren definite Doppelfolgen  $(B'_{km})_{m \in \mathbb{N}}, (C'_{km})_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Q}_\sigma$  mit  $C'_{km} \cup M_k = B'_{km}$  für alle  $k, m \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu'(C'_{km}) = 0$ .

Sei für  $n \in \mathbb{N}$   $m_{kn} := \min \left\{ m : \mu'(C'_{km}) < \frac{1}{n 2^k} \right\}$ .

Definiere nun:

$B_k := B_{kn} := B'_{km_{kn}}$  und  $C_k := C_{kn} := C'_{km_{kn}}$ .

Dann ist  $M_k \cup C_k = B_k$  und  $\mu'(C_k) < \frac{1}{n 2^k}$ , also

$\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  ( $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$  und  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  liegen in  $\mathcal{Q}_\sigma$ ) und

$$0 \leq \mu' \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu'(C_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^k} = \frac{1}{n}.$$

Somit leisten die definiten Folgen  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$  das Verlangte.

c) Für je zwei Mengen  $L, M \in \mathcal{M}$  mit  $L \subset M$  ist  $M \setminus L \in \mathcal{M}$ , denn:

Fall 1:  $M \in \mathcal{Q}$ ,  $L \in \mathcal{Q}_c$  und  $\mu'(L) < +\infty$ .

Also existiert eine definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{Q}$  mit  $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist dann  $(M \setminus L) \cup (\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = M \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ .

Für  $n \in \mathbb{N}$  definiere man nun

$C_n := \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$  und  $B_n := M \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ .

Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$   $B_n \in \mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_c$  (da  $\mathcal{Q}$  bezüglich endlicher Vereinigungen und Differenzen abgeschlossen ist),  $C_n \in \mathcal{Q}_c$

und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(C_n) = 0$ , da  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(A_i) = \mu'(L) < +\infty$ .

Somit existiert für alle  $k \in \mathbb{N}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(M \setminus L) \cup C_n = B_n$  und  $\mu'(C_n) < \frac{1}{2k}$ .

Fall 2:  $L, M \in \mathcal{Q}_c$ .

Also existiert eine definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen  $A_n \in \mathcal{Q}$  mit  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Da  $\mu_0$   $\sigma$ -endlich ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\mu_0(A_n) < +\infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist. Dann ist

$M \setminus L = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus (A_n \cap L))$  und es gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$\mu'(A_n \cap L) < \mu_0(A_n) < +\infty$  und  $A_n \cap L \in \mathcal{Q}_c$ . Also ist  $A_n \setminus (A_n \cap L) \in \mathcal{M}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  nach Fall 1 und somit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus (A_n \cap L)) \in \mathcal{M}$  nach b).

Fall 3:  $L, M \in \mathcal{M}$ .

Da  $\mu_0$   $\sigma$ -endlich ist, existiert eine definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen  $A_n \in \mathcal{Q}$  mit  $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Es ist somit  $M \setminus L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \left[ \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus M \right) \cup L \right]$ .

Es genügt zu zeigen  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus M \in \mathcal{M}$ , denn dann hat man auch

$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus M \right) \cup L \in \mathcal{M}$  nach b) und somit gilt nach dem Gezeigten auch  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \left( \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus M \right) \cup L \right) \in \mathcal{M}$ .

Zu  $M \in \mathcal{M}$  existieren definite Folgen  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Q}_c$  mit  $M \cup C_n = B_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(C_n) = 0$ .

Folglich existiert zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$  mit

$M \cup C_{n_k} = B_{n_k}$  und  $\mu'(C_{n_k}) < \frac{1}{2k}$ .

Nach Fall 2 ist  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus B_{n_k} \in \mathcal{M}$ , d.h. es existieren definite

Folgen  $(B'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(C'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Q}_c$  mit

$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus B_{n_k} \right) \cup C'_m = B'_m$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu'(C'_m) = 0$ .

Somit existiert zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $m_k \in \mathbb{N}$  mit

$$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus B_{n_k} \right) \cup C'_{m_k} = B'_{m_k} \quad \text{und} \quad \mu'(C'_{m_k}) < \frac{1}{2k}, \text{ was}$$

$$\left( \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus M \right) \cup C_{n_k} \right) \cup C'_{m_k} = B'_{m_k} \quad \text{und} \quad \mu'(C'_{m_k}) < \frac{1}{2k} \text{ zur Folge hat.}$$

Fügt man auf beiden Seiten  $C_{n_k}$  hinzu, so entsteht

$$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus M \right) \cup (C'_{m_k} \cup C_{n_k}) = B'_{m_k} \cup C_{n_k}.$$

Definiert man nun für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{C}_k := C'_{m_k} \cup C_{n_k} \quad \text{und} \quad \tilde{B}_k := B'_{m_k} \cup C_{n_k}, \text{ so sind } (\tilde{C}_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ und } (\tilde{B}_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

definite Folgen in  $\mathcal{Q}_\sigma$  und es gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\mu'(\tilde{C}_k) = \mu'(C'_{m_k} \cup C_{n_k}) \leq \mu'(C'_{m_k}) + \mu'(C_{n_k}) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}.$$

### 11. Satz:

Das  $\sigma$ -endliche Prämaß  $\mu_0$  auf  $\mathcal{Q}$  kann auf genau eine Weise zu einem Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{Q}_\sigma$  fortgesetzt werden und zwar gilt für alle  $M \in \mathcal{M}$   $\mu(M) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu'(B_n)$ , wobei  $B_n \in \mathcal{Q}_\sigma$ ,  $B_n \supseteq M$  und  $B_n$  zu einem Gerüst von  $M$  gehört.

#### Beweis:

a) Sei  $\tilde{\mu}$  ein Maß auf  $\mathcal{M}$ , das  $\mu_0$  fortsetzt, dann ist  $\tilde{\mu}(M) = \inf \mu'(B_n)$ , wobei  $B_n \in \mathcal{Q}_\sigma$ ,  $M \subseteq B_n$  und  $B_n$  zu einem Gerüst von  $M$  gehört.

Denn sei  $M \in \mathcal{M}$  und  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge in  $\mathcal{Q}_\sigma$ , die zu einem Gerüst von  $M$  gehört, dann ist  $\tilde{\mu}(B_n) = \mu'(B_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und somit  $\mu'(B_n) = \tilde{\mu}(B_n) \geq \tilde{\mu}(M)$ , da  $\tilde{\mu}$  isoton ist. Ist  $\tilde{\mu}(M) = +\infty$ , so ist  $\mu'(B_n) = +\infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also auch  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu'(B_n) = +\infty$ .

Sei nun  $\tilde{\mu}(M) < +\infty$ .

Zu  $M \in \mathcal{M}$  existieren für alle  $n \in \mathbb{N}$  Mengen  $B_n, C_n \in \mathcal{Q}_\sigma$  mit  $C_n \cup M = B_n$  und  $\mu'(C_n) < \frac{1}{n}$ , also ist

$$\mu'(B_n) = \tilde{\mu}(B_n) \leq \tilde{\mu}(M) + \mu'(C_n) = \tilde{\mu}(M) + \mu'(C_n) < \tilde{\mu}(M) + \frac{1}{n}$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , was  $\tilde{\mu}(M) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu'(B_n)$  zur Folge hat.

b) Sei umgekehrt  $\mu$  die in Definition 7 definierte Funktion auf  $\mathcal{M}$ . Dann ist  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{M}$ , das  $\mu_0$  fortsetzt, denn für  $M \in \mathcal{Q}_\sigma$  ist  $\mu(M) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu'(M)$ , da die konstante Folge  $(M)_{n \in \mathbb{N}}$  zu einem Gerüst von  $M$  gehört. Somit ist auch für alle  $M \in \mathcal{M}$   $\mu(M) = \mu_0(M)$ .

Wir zeigen noch die  $\sigma$ -Additivität von  $\mu$ . Sei also  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge paarweise disjunkter Mengen  $M_n \in \mathcal{M}$ .

1) Es ist  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n)$ .

Dies ist klar, falls  $\mu(M_n) = +\infty$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

Falls für alle  $n \in \mathbb{N}$   $\mu(M_n) < +\infty$ , so existiert nach Voraussetzung für alle  $k, n \in \mathbb{N}$  ein  $B_n \in \mathcal{Q}_G$  mit  $M_n \subseteq B_n$  und

$$\mu'(B_n) < \mu(M_n) + \frac{1}{k2^n}, \text{ also gilt } \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Da  $\mu$  isototon ist (Satz 8), gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu'\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) + \frac{1}{k} \quad (\text{vergl. 6.d}).$$

Da  $k \in \mathbb{N}$  beliebig war, folgt die Behauptung.

Folgerung: Speziell gilt für beliebige  $L, M \in \mathcal{M}$  mit  $L \subseteq M$

$$\mu(M) \leq \mu(L) + \mu(M \setminus L).$$

Ist weiterhin  $\mu(L) < +\infty$ , so gilt  $\mu(M) - \mu(L) \leq \mu(M \setminus L)$ .

2) Wegen 1) genügt es zu zeigen, daß  $\mu$  auf  $\mathcal{M}$  additiv ist, denn jeder Inhalt erfüllt Bemerkung 2.c) aus §2. Für die Additivität ist (wieder wegen 1)) aber schon

$$\mu(M_1 \cup M_2) \approx \mu(M_1) + \mu(M_2) \text{ hinreichend für beliebige disjunkte Mengen } M_1, M_2 \in \mathcal{M}.$$

Seien also  $M_1, M_2$  disjunkte Mengen aus  $\mathcal{M}$ . Somit existiert

für alle  $n \in \mathbb{N}$   $C_n^1, B_n^1, C_n^2, B_n^2 \in \mathcal{Q}_G$  mit

$$C_n^1 \cup M_1 = B_n^1, C_n^2 \cup M_2 = B_n^2, \mu'(C_n^1) < \frac{1}{n} \text{ und } \mu'(C_n^2) < \frac{1}{n}, \text{ d.h. speziell}$$

$$M_1 \supseteq B_n^1 \setminus C_n^1 \text{ und } M_2 \supseteq B_n^2 \setminus C_n^2.$$

$M_1, M_2$  sind aber disjunkt, also gilt

$$B_n^1 \cap B_n^2 = (M_1 \cup C_n^1) \cap (M_2 \cup C_n^2) \subseteq C_n^1 \cup C_n^2.$$

Bemerkung 6.d) liefert nun  $\mu'(C_n^1 \cup C_n^2) \leq \mu'(C_n^1) + \mu'(C_n^2) < \frac{2}{n}$ ,

woraus wegen der Isotonie von  $\mu'$

$$\mu'(B_n^1 \cup B_n^2) \leq \mu'(C_n^1 \cup C_n^2) < \frac{2}{n} \text{ folgt. Nun ist}$$

$$M_1 \cup M_2 \supseteq (B_n^1 \setminus C_n^1) \cup (B_n^2 \setminus C_n^2) \supseteq (B_n^1 \cup B_n^2) \setminus (C_n^1 \cup C_n^2), \text{ was zusammen}$$

mit der Isotonie von  $\mu$  und der Folgerung aus 1)

$$\mu(M_1 \cup M_2) \approx \mu((B_n^1 \cup B_n^2) \setminus (C_n^1 \cup C_n^2)) \leq \mu'(B_n^1 \cup B_n^2) - \mu'(C_n^1 \cup C_n^2)$$

ergibt. Anwendung von 6.b) liefert nun

$$\mu(M_1 \cup M_2) \approx \mu'(B_n^1) + \mu'(B_n^2) - \mu'(B_n^1 \cap B_n^2) - \mu'(C_n^1 \cup C_n^2) \approx$$

$$\approx \mu'(B_n^1) + \mu'(B_n^2) - \frac{4}{n}.$$

Da  $B_n^1 \supseteq M_1$  und  $B_n^2 \supseteq M_2$ , gilt  $\mu(M_1 \cup M_2) \approx \mu(M_1) + \mu(M_2) - \frac{4}{n}$ , woraus die Behauptung folgt, da  $n \in \mathbb{N}$  beliebig war.

Es folgen noch einige Eigenschaften des konstruierten Maßes und dann eine Erklärung, warum die Fortsetzung nicht mit Hilfe des äußeren Maßes durchgeführt wurde.

### 12. Definition:

Ein Maß  $\mu$  auf einer  $\tau$ -Algebra  $\mathcal{O}$  in  $\Omega$  heißt vollständig, wenn für jede schwachdefinite Menge  $X \subseteq \Omega$ , für die es Mengen  $M, N \in \mathcal{O}$  mit  $M \subseteq X \subseteq N$  und  $\mu(N \setminus M) = 0$  gibt, gilt  $X \in \mathcal{O}$ .

### 13. Satz:

Das konstruierte Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{M}$  ist vollständig.

#### Beweis:

Sei  $X \subseteq \Omega$  und gelte obige Bedingung.

Da  $N \in \mathcal{M}$ , existiert zu jedem  $k \in \mathbb{N}$   $B_k, C_k \in \mathcal{Q}_\tau$  mit  $B_k \supseteq N$ ,  $B_k \setminus N \subseteq C_k$  und  $\mu(C_k) < \frac{1}{2k}$ .

Da  $\mu(N \setminus M) = 0$ , existiert nach Definition von  $\mu$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine Menge  $A_k \in \mathcal{Q}_\tau$  mit  $A_k \supseteq N \setminus M$  und  $\mu(A_k) < \frac{1}{2k}$ .

$(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(C_k \cup A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  bilden ein Gerüst von  $X$ , denn

$B_k \supseteq N \supseteq X$ ,  $B_k \setminus X \subseteq B_k \setminus M = (B_k \setminus N) \cup (N \setminus M) \subseteq C_k \cup A_k$ ,  $C_k \cup A_k \in \mathcal{Q}_\tau$  und  $\mu(C_k \cup A_k) \leq \mu(C_k) + \mu(A_k) < \frac{1}{k}$ .

Also liegt  $X$  in  $\mathcal{M}$ .

### 14. Bemerkung:

Das konstruierte Maß  $\mu$  ist  $\tau$ -endlich.

### 15. Satz:

Ist  $M \in \mathcal{M}$  mit  $\mu(M) < +\infty$ , so existiert zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  eine Menge  $A_k \in \mathcal{Q}_\tau$  mit  $\mu(M \Delta A_k) < \frac{1}{k}$ . (Dabei ist  $M \Delta A_k := (M \setminus A_k) \cup (A_k \setminus M)$  die symmetrische Differenz)

#### Beweis:

Zu  $M \in \mathcal{M}$  existiert für jedes  $k \in \mathbb{N}$  eine Menge  $B_k \in \mathcal{Q}_\tau$  mit  $B_k \supseteq M$  und  $\mu(B_k \setminus M) < \frac{1}{2k}$ .

Zu  $B_k \in \mathcal{Q}_\tau$  existiert eine Menge  $A_k \in \mathcal{Q}_\tau$  mit  $A_k \subseteq B_k$  und  $\mu(B_k \setminus A_k) < \frac{1}{2k}$ .

Aus  $M \Delta A_k \subseteq (B_k \setminus A_k) \cup (B_k \setminus M)$  folgt die Behauptung.

### 16. Satz:

Die Restriktion des konstruierten Maßes  $\mu$  auf die von  $\mathcal{Q}_\tau$  erzeugte  $\tau$ -Algebra  $\mathcal{Q}_\tau(\mathcal{Q}_\tau)$  ist das einzige Maß mit Definitionsbereich  $\mathcal{Q}_\tau(\mathcal{Q}_\tau)$ , das  $\mu_0$  fortsetzt.

Beweis:

Wegen  $\mathcal{G}(\mathcal{G}) \supset \mathcal{G}$  hat jedes Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{G}(\mathcal{G})$ , das  $\mu_0$  fortsetzt, die Eigenschaft  $\mu(M) = \inf_{M \subseteq Q \in \mathcal{G}_G} \mu(Q)$  für alle  $M \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$ .

Dies beweist man wie in Teil a) des Beweises von Satz 11.

17. Bemerkung:

Versucht man, die nach Satz 16 existierende Fortsetzung des Prämaßes  $\mu_0$  auf  $\mathcal{G}$  auf die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G}_G(\mathcal{G})$  mit Hilfe des äußeren Maßes zu erreichen (vergl. etwa [1] 5.2 - 5.4), so treten folgende Probleme auf:

Ist  $Q$  eine beliebige Teilmenge von  $\Omega$ , so braucht das äußere Maß  $\mu^+(Q) := \inf_{Q \subseteq A \in \mathcal{G}_G} \mu(A)$  nicht zu existieren, da die Rechtsklasse  $R(Q) := \{r \in \mathcal{G} : r \supset \mu^+(A) \text{ für ein } A \in \mathcal{G}_G \text{ mit } Q \subseteq A\}$  nicht definit zu sein braucht. Will man nun Bedingungen angeben, sodaß  $R(Q)$  definit wird, so könnte man bei der Infimumsbildung von  $\mathcal{G}_G$  zu einer definiten Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Elementen aus  $\mathcal{G}_G$  übergehen, nur fehlt dann eine Abschätzung der Genauigkeit, mit der man das Maß von  $Q$  approximiert hat. Um diese Abschätzung doch zu erhalten, wird in Definition 7 mit einer zweiten Folge  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{G}_G$  gearbeitet, für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = 0$  gilt. Hat man auf diese Weise die Rechtsklasse  $R(Q)$  definit gemacht, so ist sofort klar, daß dann auch  $\mu(Q) = \inf_{Q \subseteq A \in \mathcal{G}_G} \mu(A)$  gilt.

#### § 4. Integrale meßbare Funktionen

Sei  $\Omega$  definite oder indefinite Menge und  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -Algebra in  $\Omega$ .

$\overline{\mathcal{B}}$  sei die  $\sigma$ -Algebra der Borelschen Mengen in  $\overline{\mathbb{R}}$ .  $\overline{\mathcal{B}}$  besteht aus allen Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$ , die von der Form  $B$ ,  $B \cup \{+\infty\}$ ,  $B \cup \{-\infty\}$ ,  $B \cup \{-\infty, +\infty\}$  mit  $B \in \mathcal{B}$  sind.

##### 1. Definition:

Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  beliebige numerische Funktionen.

a)  $\{f > r\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > r\}$  ( $r \in \mathbb{R}$ ).

Analog definiert man  $\{f < r\}$ .

$\{f > g\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) > g(\omega)\}$ .

Analog definiert man  $\{f < g\}$ ,  $\{f = g\}$  und  $\{f \neq g\}$ .

b)  $f$  heißt  $\mathcal{A}$ -meßbar, wenn  $\{f > r\} \in \mathcal{A}$  für alle  $r \in \mathbb{Q}$ .

##### 2. Bemerkung:

a) Da die halboffenen Intervalle  $[r, q]$  mit rationalen Endpunkten  $r, q \in \mathbb{Q}$  erzeugen, genügt es in Definition 1  $\{f > r\} \in \mathcal{A}$  für  $r \in \mathbb{Q}$  zu fordern. Natürlich ist dann auch  $\{f > r\} \in \mathcal{A}$  für jedes  $r \in \mathbb{R}$ .

b) Ist  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  beliebige numerische Funktion, so ist  $f^{-1} := \{[r, r] : r \in \mathbb{Q}\}$  (die Menge aller Paare  $[f, r]$  mit  $r \in \mathbb{Q}$ ) ein definiter und ordnungsdefiniter Halbtring in  $\Omega$ .

falls man zwischen den Punkten  $\omega \in \Omega$  und den Elementen  $[f, r] \in f^{-1}$  eine Relation  $\tau$  wie folgt definiert:

$\omega \tau [f, r] \Leftrightarrow f(\omega) > r$ , wobei  $\omega \in \Omega$  und  $r \in \mathbb{Q}$  beliebig.

Die Halbtringeigenschaften zeigt man mit den bekannten Eigenschaften der inversen Mengenfunktion.

Für jede definite Folge  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{Q}$  ist  $([f, r_n])_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $f^{-1}$ .

Ist  $f$  sogar schwachdefinit, so auch  $\tau$ .

c) Für je zwei  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  in  $\Omega$  ist  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$  folgendermaßen definiert:

In jedem  $A_1 \in \mathcal{A}_1$  existiert  $A_2 \in \mathcal{A}_2$ , so daß für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt  $\omega \tau_1 A_1 \Leftrightarrow \omega \tau_2 A_2$ , wobei  $\tau_1, \tau_2$  die zu  $\mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{A}_2$  gehörigen Relationen sind.

##### 3. Beispiel:

Jede stetige numerische Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  ist  $\mathcal{B}^n$ -meßbar. (Vergl. Anhang 3, §1.8 und §2.2.i.)

**4. Satz:** [1] 9.2

Sei  $f$  eine numerische Funktion auf  $\Omega$ . Die folgenden Bedingungen sind äquivalent zur  $\mathcal{O}$ -Meßbarkeit von  $f$ :

- a)  $\{f > r\} \in \mathcal{O}$  für jedes  $r \in \mathbb{Q}$ ;
- b)  $\{f > r\} \in \mathcal{O}$  für jedes  $r \in \mathbb{Q}$ ;
- c)  $\{f \leq r\} \in \mathcal{O}$  für jedes  $r \in \mathbb{Q}$ ;
- d)  $\{f < r\} \in \mathcal{O}$  für jedes  $r \in \mathbb{Q}$ .

**Beweis:**

Da a) nach Definition gilt, ist nur die Äquivalenz von a) - d) zu zeigen. Für jedes  $r \in \mathbb{Q}$  gilt

$\{f > r\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > r + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{O}$ , da  $(\{f > r + \frac{1}{n}\})_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{O}$  ist (vergl. 2.b)).

Den Rest der Behauptung zeigt man wie üblich, wobei die evtl. auftretenden Folgen jeweils wegen 2.b) definit sind.

**5. Satz:** [1] 9.3 und 9.4

Für je zwei  $\mathcal{O}$ -meßbare numerische Funktionen  $f, g$  auf  $\Omega$  gilt:

- a)  $\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f=g\}$  und  $\{f \neq g\}$  liegen in  $\mathcal{O}$ .
- b)  $f \pm g$  und  $f \cdot g$  sind  $\mathcal{O}$ -meßbar (falls überall auf  $\Omega$  definiert).

Für die weitere Entwicklung der Integrationstheorie ist nun die folgende Voraussetzung zu machen (vergl. Bemerkung 12 und Satz 14).

**6. Voraussetzung:**

$(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$  sei definiter Maßraum (vergl. § 2. 10).

**7. Definition:**

- a) für jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  werde die Indikatorfunktion  $1_A$  definiert durch  $1_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$ .
- b) Eine reelle Funktion  $u$  auf  $\Omega$  heißt  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktion (in Normaldarstellung), wenn sie von der Form  $u = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist, mit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ , und paarweise disjunkten Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{O}$  mit  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ .
- c) Sei  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{O})$  die Menge aller  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktionen auf  $\Omega$ .

**8. Bemerkung:**

- a) Für jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  ist  $1_A$  genau dann  $\mathcal{O}$ -meßbar, wenn  $A \in \mathcal{O}$ . Denn ist  $1_A$   $\mathcal{O}$ -meßbar, so ist für  $r=1$   $\{1_A = 1\} = A \in \mathcal{O}$ .

Ist umgekehrt  $A \in \mathcal{O}$ , so folgt die Behauptung aus der Beziehung ( $r \in \mathbb{Q}$ )

$$\{1_A \leq r\} = \begin{cases} \emptyset & r < 0 \\ A & 0 \leq r < 1 \\ \Omega & r \geq 1. \end{cases}$$

b)  $1_A$  ist genau dann schwachdefinit, wenn  $A$  schwachdefinite Teilmenge von  $\Omega$  ist. Speziell ist also wegen Voraussetzung 6 jede  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktion schwachdefinit.

c) Wegen Satz 5.b) und a) ist jede  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktion  $\mathcal{O}$ -meßbar.

d)  $\mathcal{E}$  besitzt folgende Eigenschaften:

Seien  $u, v \in \mathcal{E}$  und  $r \in \mathbb{R}^+$ , dann liegen  $r \cdot u$ ,  $u+v$ ,  $u \cdot v$ ,  $\sup(u, v)$  und  $\inf(u, v)$  wieder in  $\mathcal{E}$ .

Der folgende Hilfssatz bereitet die Definition 10 vor.

### 9. Hilfssatz: [1] 10.2

Für je zwei Darstellungen  $u = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^n b_j 1_{B_j}$  einer  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktion  $u \in \mathcal{E}$  gilt:

$$\sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^n b_j \mu(B_j). \quad (\text{Hierbei gilt } 0 \cdot \infty = 0 \text{ und } \infty + \infty = \infty)$$

### 10. Definition:

Sei  $u$  eine  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktion. Dann heißt die wegen

Hilfssatz 9 von der speziellen Wahl der Darstellung

$u = \sum_{i=1}^m a_i 1_{A_i}$  unabhängige Zahl  $\int u \, d\mu := \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i)$  das  $\mu$ -Integral von  $u$  über  $\Omega$ .

### 11. Eigenschaften des $\mu$ -Integrals:

- a)  $\int 1_A \, d\mu = \mu(A)$  für beliebiges  $A \in \mathcal{O}$ ;
- b)  $\int (ru) \, d\mu = r \int u \, d\mu$  für  $u \in \mathcal{E}$  und  $r \in \mathbb{R}^+$ ;
- c)  $\int (u+v) \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu$  für  $u, v \in \mathcal{E}$ ;
- d)  $\int u \, d\mu \leq \int v \, d\mu$  für  $u, v \in \mathcal{E}$  mit  $u \leq v$ .

### 12. Bemerkung:

Will man nun für eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $\mathcal{O}$ -meßbaren Funktionen auf  $\Omega$  die  $\mathcal{O}$ -Meßbarkeit von z.B.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  beweisen, so muß man folgendes beachten:

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge von numerischen Funktionen auf  $\Omega$  und  $(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(\omega) := \sup (f_n(\omega))$  für  $\omega \in \Omega$ .

Das Supremum der Menge  $S(\omega) := \{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$  ( $\omega \in \Omega$ ) existiert aber konstruktiv nur, falls die Linksklasse  $L(S(\omega)) := \{r \in \mathbb{Q} : r < f_n(\omega) \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$  von  $S(\omega)$  definit ist.

Kann man durch zusätzliche Bedingungen an die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und die einzelnen Funktionen  $f_n$  sicherstellen, daß für

alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $f_n(\omega)$  definit gegebene reelle Zahl ist, so ist  $L(S(\omega))$  definit, denn dann ist die Relation  $r < f_n(\omega)$  mit  $r \in \mathbb{Q}$  definit.

Da  $\Omega$  als schwachdefinit vorausgesetzt ist (hier wird Voraussetzung 6 zum ersten Mal wirklich ausgenutzt), genügt es zu fordern, daß  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge schwachdefiniter Funktionen  $f_n$  ist.

### 13. Satz: [1] 9.5 und 9.7

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge  $\mathcal{O}$ -meßbarer schwachdefiniter numerischer Funktionen auf  $\Omega$ . Dann ist jede der folgenden Funktionen  $\mathcal{N}$ -meßbar:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sogar punktweise konvergent auf  $\Omega$ , so ist auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$   $\mathcal{O}$ -meßbar.

Beweis:

$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  ist  $\mathcal{O}$ -meßbar, denn für jedes  $r \in \mathbb{Q}$  ist  $\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n < r \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ f_n < r \}$  und  $(\{ f_n < r \})_{n \in \mathbb{N}}$  ist definite Folge in  $\mathcal{O}$  wegen Bemerkung 2.b) und weil  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge ist. Den Rest zeigt man wie üblich.

### 14. Satz: [1] 11.1 und 11.2

- a) Für jede definite isotone Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen aus  $\mathcal{E}$  und jedes  $v \in \mathcal{E}$  gilt  $\int v \, d\mu < \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu$ , falls  $v < \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .
- b) Für je zwei definite isotone Folgen  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen aus  $\mathcal{E}$  gilt  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu$ , falls  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$ .

Beweis:

Die Behauptung kann wie in [1] 11.1 und 11.2 gezeigt werden, wobei Satz 4 aus §2 verwendet wird, was möglich ist, da  $\mathcal{A}$  wegen Voraussetzung 6 ordnungsdefinit ist.

### 15. Definition:

- a)  $\mathcal{E}^*$  sei die Menge aller numerischen Funktionen  $f \geq 0$  auf  $\Omega$ , zu welchen eine definite isotone Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $\mathcal{A}$ -Elementarfunktionen  $u_n \in \mathcal{E}$  existiert mit  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .
- b) Für  $f \in \mathcal{E}^*$  sei  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  eine Darstellung mittels definiter isotoner Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{E}$ . Dann heißt  $\int f \, d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu$  das  $\mu$ -Integral von  $f$  über  $\Omega$ .

16. Bemerkungen:

a) Wegen Satz 14.b) ist das  $\mu$ -Integral einer Funktion  $f \in \mathcal{E}^*$  von der speziellen Darstellung mittels definiter isotoner Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{E}$  unabhängig.

b) Auf der Basis des bisher erarbeiteten können nun die Charakterisierung von  $\mathcal{E}^*$  als Menge aller  $\mathcal{O}$ -meßbaren numerischen Funktionen  $f \geq 0$  auf  $\Omega$  und die bekannten Eigenschaften des  $\mu$ -Integrals von Funktionen aus  $\mathcal{E}^*$  bewiesen werden, wie man es aus der axiomatischen Mathematik gewohnt ist. Der Vollständigkeit halber sei noch der später mehrfach angewendete Satz von B. Levi über die monotone Konvergenz angegeben.

17. Satz: [1] 11.4

Für jede definite isotone Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{E}^*$  ist  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathcal{E}^*$  und  $\int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu$ .

18. Bemerkung:

Für beliebige  $\mathcal{O}$ -meßbare numerische Funktionen  $f$  auf  $\Omega$  kann man durch die Betrachtung des Positivteils  $f^+ := \sup(f, 0)$  und des Negativteils  $f^- := -\inf(f, 0)$  das  $\mu$ -Integral auch für diese Funktionen erklären durch  $\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$  (falls  $\int f^+ d\mu$  und  $\int f^- d\mu < +\infty$ ) mit den bekannten Kriterien für die Existenz (vergl. z.B. [1] 12.2) und der Eigenschaft, daß das  $\mu$ -Integral eine isotone Linearform ist auf dem Vektorraum aller reellen Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , für die das  $\mu$ -Integral existiert.

19. Hilfssatz: (Fatou) [1] 15.1

Für jede definite Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen aus  $\mathcal{E}^*$  gilt  $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ .

20. Bemerkung:

Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge schwachdefiniter Mengen  $A_n \in \mathcal{O}$ . Dann ist  $(1_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge von Funktionen aus  $\mathcal{E}^*$ . Somit liegen die Funktionen  $\liminf_{n \rightarrow \infty} 1_{A_n}$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} 1_{A_n}$  in  $\mathcal{E}^*$  und da sie die Indikatorfunktionen von  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$  bzw.  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$  sind, gilt folgendes

21. Korollar: [1] 15.2

Für jede definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Mengen aus  $\mathcal{O}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Ist das Maß  $\mu$  endlich, so gilt außerdem

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Zum Schluß zitieren wir noch einige Sätze, die zum Beweis des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz (vergl. § 6.7) verwendet werden können und später auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht werden.

**22. Satz:** [1] 14.1

Sei  $p$  eine reelle Zahl mit  $1 \leq p < +\infty$  und sei  $q$  definiert durch  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt für je zwei  $\mathcal{O}$ -meßbare numerische schwachdefinierte Funktionen  $f, g$  auf  $\Omega$  die Höldersche Ungleichung  $\int |fg| d\mu \leq (\int |f|^p d\mu)^{1/p} \cdot (\int |g|^q d\mu)^{1/q}$ .

Führt man den Beweis wie in [1] 14.1, so wird der Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet. Einen konstruktiven Beweis dieses Satzes findet man in [7] S.115.

**23. Satz:** [1] 14.2

Für je zwei  $\mathcal{O}$ -meßbare numerische schwachdefinite Funktionen  $f, g$  auf  $\Omega$  mit auf ganz  $\Omega$  definierter Summe  $f + g$  gilt die Minkowskische Ungleichung  $(\int |f+g|^p d\mu)^{1/p} \leq (\int |f|^p d\mu)^{1/p} + (\int |g|^p d\mu)^{1/p}$  für jedes  $p \in \mathbb{R}$  mit  $p \geq 1$ .

**24. Definition:**

Eine numerische schwachdefinite Funktion  $f$  auf  $\Omega$  heißt  $p$ -fach  $\mu$ -integrierbar ( $1 \leq p < +\infty$ ), wenn sie  $\mathcal{O}$ -meßbar ist und wenn  $|f|^p \mu$ -integrierbar ist.

**25. Satz:** [1] 14.4

Sind  $f$  und  $g$   $p$ -fach  $\mu$ -integrierbare numerische schwachdefinite Funktionen auf  $\Omega$ , so sind auch die Funktionen  $rf$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) und  $f+g$  (falls auf ganz  $\Omega$  definiert), sowie  $\sup(f, g)$  und  $\inf(f, g)$   $p$ -fach  $\mu$ -integrierbar ( $1 \leq p < +\infty$ ).

## § 5. Meßbare Abbildungen und Bildmaße

Der schon in §4 verwendete Begriff der  $\mathcal{O}$ -Meßbarkeit (bezüglich einer  $\mathcal{C}$ -Algebra  $\mathcal{O}$  auf einer Menge  $\Omega$ ) soll im Hinblick auf die Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie wie folgt erweitert werden.

Seien  $(\Omega, \mathcal{O})$  und  $(\Omega', \mathcal{O}')$  definite Meßräume und  $\mathcal{E}$  bzw.  $\mathcal{E}'$  die zu  $\mathcal{O}$  bzw.  $\mathcal{O}'$  gehörigen definiten und ordnungsdefiniten Erzeugendensysteme.

### 1. Definition:

Eine schwachdefinite Abbildung  $T: \Omega \rightarrow \Omega'$  heißt  $\mathcal{O}$ - $\mathcal{O}'$ -meßbar, wenn  $T^{-1}(E') \in \mathcal{O}$  für jedes  $E' \in \mathcal{E}'$ .

### 2. Bemerkung:

a)  $T: \Omega \rightarrow \Omega'$  ist  $\mathcal{O}$ - $\mathcal{O}'$ -meßbar genau dann, wenn  $T^{-1}(A') \in \mathcal{O}$  für jedes  $A' \in \mathcal{O}'$ .

b) Seien  $E$  und  $E'$  separable metrische Räume und seien  $\mathcal{Q}_E$  und  $\mathcal{Q}_{E'}$  zugehörige definite und ordnungsdefinite Basen der Topologie von  $E$  bzw.  $E'$ . Dann ist jede schwachdefinite stetige Abbildung  $T: E \rightarrow E'$   $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}_E)$ - $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{Q}_{E'})$ -meßbar. (Vergl. Anhang 3, §2.2.i.)

### 3. Satz:

Sind  $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)$  ( $i=1,2,3$ ) definite Meßräume und  $T_1: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$   $\mathcal{O}_1$ - $\mathcal{O}_2$ -meßbar und  $T_2: \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$   $\mathcal{O}_2$ - $\mathcal{O}_3$ -meßbar, so ist die zusammengesetzte Abbildung  $T_2 \circ T_1$   $\mathcal{O}_1$ - $\mathcal{O}_3$ -meßbar.

### Beweis:

Für jede schwachdefinite Teilmenge  $A \in \mathcal{O}_3$  gilt  $(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(A))$ .

### 4. Definition:

Sei  $(\Omega_n, \mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge von definiten Meßräumen,  $\Omega$  schwachdefinite Menge und  $\mathcal{T} = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge von schwachdefiniten Abbildungen  $T_n: \Omega \rightarrow \Omega_n$ . Bezeichnet  $\mathcal{E}_n$  das definite und ordnungsdefinite Erzeugendensystem von  $\mathcal{O}_n$ , so werde gesetzt:  $\mathcal{O}(\mathcal{T}) := \mathcal{O}(T_n: n \in \mathbb{N}) := \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(\mathcal{E}_n))$ , wobei  $E_n \in \mathcal{E}_n$  beliebig.  $\mathcal{O}(\mathcal{T})$  heißt die von den Abbildungen  $T_n$  erzeugte  $\mathcal{C}$ -Algebra.

5. Bemerkung:

a) In obiger Situation ist  $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(E_n)$  ( $E_n \in \mathcal{E}_n$ ) ein definites Erzeugendensystem von  $\mathcal{O}(\mathcal{Y})$ .

b) Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen in Definition 4 noch eine schwachdefinite Abbildung  $S: \Omega_0 \rightarrow \Omega$  eines definiten Maßraumes  $(\Omega_0, \mathcal{O}_0)$  in  $\Omega$  gegeben, so ist  $S$  genau dann  $\mathcal{O}_0$ - $\mathcal{Y}(\mathcal{T})$ -meßbar, wenn jede der Abbildungen  $T_n \circ S$   $\mathcal{O}_0$ - $\mathcal{O}_n$ -meßbar ist.

6. Satz: [1] 7.5

Sei  $T: \Omega \rightarrow \Omega'$  eine  $\mathcal{O}$ - $\mathcal{O}'$ -meßbare Abbildung.

Dann wird für jedes Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{O}$  durch  $A' := T(\mu^{-1}(A'))$  ein Maß  $\mu'$  auf  $\mathcal{O}'$  definiert.

Beweis:

Für jede definite Folge  $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{O}'$  ist  $(T^{-1}(A'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{O}$  und es gilt

$$T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A'_n).$$

7. Definition:

Das in der Situation von Satz 6 existierende Maß  $\mu'$  heißt das Bild von  $\mu$  bei der Abbildung  $T$  und wird mit  $T(\mu)$  bezeichnet.

8. Bemerkung:

Wie üblich zeigt man, daß die Bildung von Bildmaßen transitiv ist, d.h. es gilt  $(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2(T_1(\mu))$  unter den Voraussetzungen von Satz 3, wobei  $\mu$  ein Maß auf  $\mathcal{O}_1$  ist.

Über den Zusammenhang zwischen  $\mu$ -Integralen und  $T(\mu)$ -Integralen bei meßbarer Abbildung  $T$  gilt der folgende

9. Satz: [1] 18.1

Sei  $T: \Omega \rightarrow \Omega'$   $\mathcal{O}$ - $\mathcal{O}'$ -meßbare Abbildung und  $f'$  schwachdefinite numerische  $\mathcal{O}'$ -meßbare Funktion  $\geq 0$  auf  $\Omega'$ .

Dann gilt  $\int f' dT(\mu) = \int f' \circ T d\mu$ .

Beweis:

Nach Satz 3 ist  $f' \circ T$   $\mathcal{O}$ -meßbar und  $\geq 0$ , also ist  $\int f' \circ T d\mu$  definiert.

Ist nun  $f'$  zunächst eine  $\mathcal{O}'$ -Elementarfunktion  $f' = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A'_i}$  mit  $a_i \in \mathbb{Q}_+$  und  $A'_i \in \mathcal{O}'$ , so ist  $f' \circ T = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$

mit den Mengen  $A_i := T^{-1}(A'_i)$  eine  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktion.

Da definitionsgemäß  $T(\mu)(A_1^*) = \mu(A_1)$  gilt, ist

$$\int f' dT(\mu) = \int f' \circ T d\mu.$$

Bei beliebigem  $\mathcal{O}'$ -meßbarem  $f' \geq 0$  wähle man eine definite isotone Folge  $(u_n')_{n \in \mathbb{N}}$  von  $\mathcal{O}'$ -Elementarfunktionen mit

$$f' = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n'.$$

Dann ist  $(u_n' \circ T)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge von  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktionen mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n' \circ T) = f' \circ T$ , woraus die Behauptung folgt.

**10. Korollar:** [1] 18.2

Sei  $f'$  eine  $\mathcal{O}'$ -meßbare numerische schwachdefinite Funktion auf  $\mathcal{L}'$ . Dann ist  $f'$  genau dann  $T(\mu)$ -integrierbar, wenn  $f' \circ T$   $\mu$ -integrierbar ist.

In diesem Falle gilt  $\int f' dT(\mu) = \int f' \circ T d\mu$ .

## § 6. Fast überall bestehende Eigenschaften und stochastische

### Konvergenz

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  definiter Maßraum und  $\mathcal{E}^*$  die Menge aller schwachdefiniten  $\mathcal{A}$ -meßbaren numerischen Funktionen  $f \geq 0$  auf  $\Omega$ .  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  muß definiter Maßraum sein, weil wir die Ergebnisse des § 4 anwenden wollen.)

#### 1. Definition:

- Eine (schwachdefinite) Teilmenge  $N \subseteq \Omega$  heißt eine  $\mu$ -Nullmenge, wenn  $N \in \mathcal{A}$  und  $\mu(N) = 0$  ist.
- Eine Aussageform  $A(\omega)$  ( $\omega \in \Omega$ ) gilt  $\mu$ -fast überall auf  $\Omega$ , wenn es eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$  gibt mit  $\{\omega \in \Omega: \neg A(\omega)\} \subseteq N$ .

#### 2. Bemerkung:

- Jede Vereinigung einer definiten Folge von  $\mu$ -Nullmengen ist wieder eine  $\mu$ -Nullmenge.
- Jede zu  $\mathcal{A}$  gehörige Teilmenge einer  $\mu$ -Nullmenge ist eine  $\mu$ -Nullmenge.
- Ist  $\mu$  vollständig, so ist jede Teilmenge einer  $\mu$ -Nullmenge wieder eine  $\mu$ -Nullmenge.

Es folgen nun einige Sätze, die den Zusammenhang mit der Theorie aus § 4 herstellen. Wiederum unter Beachtung von Bemerkung 2.b) aus § 4 können alle Beweise wörtlich aus der axiomatischen Mathematik übernommen werden.

#### 3. Satz: [1] 13.2

Für jede Funktion  $f \in \mathcal{E}^*$  ist  $\int f d\mu = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$   $\mu$ -fast überall.

#### 4. Satz: [1] 13.3

Seien  $f$  und  $g$   $\mathcal{A}$ -meßbare numerische schwachdefinite Funktionen auf  $\Omega$ , welche  $\mu$ -fast überall auf  $\Omega$  gleich sind, dann gilt:

- $\int f d\mu = \int g d\mu$ , falls  $f \geq 0$  und  $g \geq 0$ ;
- Ist  $f$  integrierbar, so ist  $g$  integrierbar und es gilt  $\int f d\mu = \int g d\mu$ .

#### 5. Korollar: [1] 13.4

Seien  $f$  und  $g$   $\mathcal{A}$ -meßbare numerische schwachdefinite Funktionen auf  $\Omega$  mit  $|f| \leq g$   $\mu$ -fast überall. Dann ist mit  $g$  auch  $f$   $\mu$ -integrierbar.

**6. Satz:** [1] 13.5

Jede  $\mu$ -integrierbare numerische schwachdefinite Funktion  $f$  auf  $\Omega$  ist  $\mu$ -fast überall auf  $\Omega$  endlich.

**7. Satz:** (H. Lebesgue, Satz von der majorisierten Konvergenz) [1] 15.4

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge reeller  $p$ -fach integrierbarer schwachdefiniter Funktionen auf  $\Omega$ , die auf  $\Omega$   $\mu$ -fast überall konvergiert. Es existiere eine  $p$ -fach  $\mu$ -integrierbare numerische schwachdefinite Funktion  $g \geq 0$  auf  $\Omega$  mit  $|f_n| \leq g$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann gibt es eine reelle  $\mathcal{O}$ -meßbare schwachdefinite Funktion  $f$  auf  $\Omega$ , gegen die  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\mu$ -fast überall konvergiert.

Es folgt noch eine kurze Behandlung der für die Wahrscheinlichkeitstheorie wichtigen stochastischen Konvergenz.

Hierzu sei das Maß  $\mu$  auf  $\Omega$  sogar endlich.

**8. Definition:**

Eine definite Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller  $\mathcal{O}$ -meßbarer schwachdefiniter Funktionen auf  $\Omega$  heißt  $\mu$ -stochastisch konvergent gegen eine reelle  $\mathcal{O}$ -meßbare schwachdefinite Funktion  $f$  auf  $\Omega$ , wenn für jedes  $r \in \mathbb{Q}_+^*$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f| > r\}) = 0$  gilt.

**9. Bemerkung:**

Der stochastische Limes ist  $\mu$ -fast überall eindeutig bestimmt, denn seien  $f$  und  $f'$  stochastische Limiten einer definiten Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller  $\mathcal{O}$ -meßbarer schwachdefiniter Funktionen auf  $\Omega$ . Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag

$$\{|f - f'| > r\} \subseteq \{|f_n - f| > \frac{r}{2}\} \cup \{|f_n - f'| > \frac{r}{2}\}, \text{ also}$$

$\mu(\{|f - f'| > r\}) \leq \mu(\{|f_n - f| > \frac{r}{2}\}) + \mu(\{|f_n - f'| > \frac{r}{2}\})$  ( $r \in \mathbb{Q}_+^*$ ).  
Somit gilt  $\mu(\{|f - f'| > r\}) = 0$  für jedes  $r \in \mathbb{Q}_+^*$ .

Also ist  $f = f'$   $\mu$ -fast überall auf  $\Omega$ , da

$$\mu(\{f \neq f'\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f - f'| > \frac{1}{n}\}\right) = 0.$$

**10. Satz:**

Konvergiert eine definite Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller  $\mathcal{O}$ -meßbarer schwachdefiniter Funktionen auf  $\Omega$   $\mu$ -fast überall gegen eine reelle  $\mathcal{O}$ -meßbare schwachdefinite Funktion  $f$  auf  $\Omega$ , so konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch  $\mu$ -stochastisch gegen  $f$ .

**Beweis:**

Für  $r \in \mathbb{Q}_+^*$  ist wegen §4.21  $\limsup \mu(\{|f_n - f| > r\}) \leq \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{|f_n - f| > r\}\right) \leq \mu\left(\{r + \limsup f_n < f < r + \liminf f_n\}\right) = 0.$

## § 7. Der Satz von Daniell-Stone

Sei  $\Omega$  schwachdefinite Menge.

Diese Voraussetzung ist notwendig, weil später Suprema definiter Folgen von reellen schwachdefiniten Funktionen auf  $\Omega$  betrachtet werden und für diese zu Satz §4.14 und § 4.17 analoge Eigenschaften bewiesen werden. (Vergl. die Bemerkung 12 in § 4.)

### 1. Definition:

a) Eine (definite oder indefinite) Menge  $\mathcal{F}$  von reellen schwachdefiniten Funktionen auf  $\Omega$  heißt **Stonescher Vektorverband**, wenn gilt:

- 1)  $\mathcal{F}$  ist Vektorverband im Sinne der Verbandstheorie;
- 2)  $\inf(u, 1) \in \mathcal{F}$  für jedes  $u \in \mathcal{F}$ .

$\mathcal{F}_+$  bezeichne die Menge aller  $u \in \mathcal{F}$  mit  $u \geq 0$ .

b) Sei  $\mathcal{F}$  Stonescher Vektorverband reeller schwachdefiniter Funktionen auf  $\Omega$ .

Eine schwachdefinite Teilmenge  $G \subset \Omega$  heißt  $\mathcal{F}$ -**offen**, wenn eine definite isotone Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$  existiert mit

$$1_G = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

$\mathcal{G}$  sei die im allgemeinen indefinite Menge aller  $\mathcal{F}$ -offenen Teilmengen von  $\Omega$ .

c) Für einen Stoneschen Vektorverband  $\mathcal{F}$  reeller schwachdefiniter Funktionen auf  $\Omega$  sei  $\mathcal{F}_+^*$  die Menge aller numerischen schwachdefiniten Funktionen  $f \geq 0$  auf  $\Omega$ , zu denen eine definite isotone Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$  existiert mit  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

### 2. Bemerkung:

a) Jeder Vektorverband, der die konstante Funktion 1 enthält, erfüllt die Bedingung 1.a.2), ist also Stonescher Vektorverband.

b)  $G \subset \Omega$  ist genau dann  $\mathcal{F}$ -offen, wenn  $1_G \in \mathcal{F}_+^*$ .

c) In Definition 1.b) dürfen nur schwachdefinite Teilmengen  $G$  von  $\Omega$  betrachtet werden, da  $1_G$  als Supremum einer definiten Folge schwachdefiniter Funktionen wieder schwachdefinit ist.

### 3. Hilssatz:

Das System  $\mathcal{G}$  der  $\mathcal{F}$ -offenen Mengen besitzt folgende Eigenschaften:

- a)  $\{f > r\} \in \mathcal{G}$  für jedes  $f \in \mathcal{F}_+^*$  und jedes  $r \in \mathbb{Q}_+$ .
- b) Der Durchschnitt zweier  $\mathcal{F}$ -offener Mengen ist  $\mathcal{F}$ -offen.

- c) Mit jeder definiten Folge  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathcal{F}$ -offener Mengen ist auch  $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$   $\mathcal{F}$ -offen.
- d) Jede Vereinigung einer definiten Folge  $\mathcal{F}$ -offener Mengen kann als Vereinigung einer definiten Folge paarweise disjunkter  $\mathcal{F}$ -offener Mengen dargestellt werden.

Beweis:

a) Seien  $f \in \mathcal{F}_+^*$  und  $r \in \mathbb{Q}_+$ .

Zu  $f$  existiert also eine definite isotone Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$  mit  $f = \sup u_n$ . Wegen 1.a.2) liegt jede der Funktionen  $v_n := n(u_n - \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n, r) = n(u_n - r \cdot \inf(\frac{1}{r} u_n, 1)) = n(u_n - r)^+$  in  $\mathcal{F}_+$ .

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist definite isotone Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \in \{f \leq r\} \\ +\infty & \text{für } \omega \in \{f > r\}. \end{cases}$$

Definiert man  $w_n := \inf(v_n, 1)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite isotone Folge in  $\mathcal{F}_+$  mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} w_n = 1_{\{f > r\}}$ .

Also ist  $\{f > r\}$   $\mathcal{F}$ -offen.

b) Es gilt  $1_{G \cap H} = \inf(1_G, 1_H)$  für beliebige schwachdefinite Teilmengen  $G, H$  von  $\Omega$ . Da  $\mathcal{F}_+^*$  inf-stabil ist, folgt hieraus die Behauptung.

c) Sei  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge  $\mathcal{F}$ -offener Mengen.

Sei  $(1_G)_{n \in \mathbb{N}}$  die dazugehörige definite Folge der schwachdefiniten Indikatorfunktionen  $1_{G_n}$ . Da  $\mathcal{F}_+^*$  sup-stabil ist,

kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Folge  $(1_{G_n})_{n \in \mathbb{N}}$  isoton ist. Dann gilt  $\sup 1_{G_n} = \sup u_n$  mit definiter isotoner Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$ . Dies zeigt man wie im folgenden Hilfssatz 5.a).

Aus  $1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n} = \sup_{n \in \mathbb{N}} 1_{G_n}$  folgt dann die Behauptung.

d) Mit der Bezeichnung aus Hilfssatz 10 in § 1 gilt

$$1_{B_n} = 1_{A_n} - \sup_{1 \leq i \leq n} 1_{A_i}, \text{ woraus schon die Behauptung folgt.}$$

Im folgenden soll auf der kleinsten  $\mathcal{C}$ -Algebra  $\mathcal{O}$  bezüglich welcher alle Funktionen eines vorgegebenen Stoneschen Vektorverbandes meßbar sind, ein Maß mit bestimmten Eigenschaften konstruiert werden. Da hierzu die Ergebnisse aus § 3 angewendet werden sollen, brauchen wir ein definites Mengensystem, das  $\mathcal{O}$  erzeugt. Aus diesem Grunde machen wir folgende

4. Voraussetzung:

Sei  $\mathcal{F}$  Stonescher Vektorverband reeller schwachdefiniter Funktionen auf  $\Omega$ , in dem eine definite Teilmenge  $\mathcal{F}'$

existiert, sodaß jedes  $u \in \mathcal{F}$  punktwaiser Limes einer definiten Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}'$  ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit enthalte  $\mathcal{F}'$  mit je endlich vielen Funktionen auch deren Supremum.

Unter diesen Voraussetzungen heißt  $\mathcal{F}$  definit erzeugter Stonescher Vektorverband.

### 5. Hilfssatz:

- a) Zu jedem  $f \in \mathcal{F}_+^*$  existiert eine definite isotone Folge  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}'$  mit  $f = \sup_{m \in \mathbb{N}} v_m$ .
- b) Jede  $\mathcal{F}$ -offene Menge ist Vereinigung einer definiten Folge  $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$   $\mathcal{F}$ -offener Mengen von der Form  $V_m = \{v_m > 1/2\}$ , wobei  $v_m \in \mathcal{F}'$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$ .

### Beweis:

a) Sei  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  mit definiter isotoner Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $u_n = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{nm}$  mit definiter isotoner Folge  $(f_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}'$ . Definiert man für jedes  $m \in \mathbb{N}$   $v_m := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_{nm}$ , dann liegt jedes  $v_m$  in  $\mathcal{F}'$  und  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ist definite isotone Folge, da  $(f_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  isoton ist.

Aus der Isotonie von  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt  $v_m \leq u_m$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  und somit ist  $\sup_{m \in \mathbb{N}} v_m \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} u_m = f$ .

Andererseits gilt für jedes  $m > n$   $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_{nm} = u_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$ , woraus die Behauptung folgt.

b) Sei  $G$   $\mathcal{F}$ -offen, d.h.  $1_G = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  mit definiter isotoner Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$ .

Nach a) gilt dann sogar  $1_G = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$  mit definiter isotoner Folge  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}'$ . Wegen Hilfssatz 3 ist  $\{v_m > 1/2\}$   $\mathcal{F}$ -offen für jedes  $m \in \mathbb{N}$ , also gilt  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{v_m > 1/2\} = G$ .

### 6. Hilfssatz:

Sei  $\mathcal{O}_f := \{f > r\} : f \in \mathcal{F}', r \in \mathbb{Q}_+\}$ .

Dann ist  $\mathcal{O}_f$  definites Mengensystem und es gilt

$\alpha_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_f) = \alpha_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_f) = \alpha_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}')$  und jedes  $u \in \mathcal{F}$  ist

$\alpha_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_f)$ -meßbar.

### Beweis:

a) Wegen Hilfssatz 3 ist  $\{f > r\} \in \mathcal{O}_f$  ( $r \in \mathbb{Q}_+$ ) für jedes  $f \in \mathcal{F}_+^*$ , also auch für  $f \in \mathcal{F}'$ . Somit gilt  $\mathcal{O}_f \in \mathcal{O}_f$ .

b) Sei  $G \in \mathcal{O}_f$ . Wegen Hilfssatz 5.b) ist dann  $G \in \alpha_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}')$ , d.h.  $\mathcal{O}_f \in \alpha_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}')$ .

c) Wegen Satz 13 aus § 4 und Hilfssatz 5.a) ist jedes  $f \in \mathcal{F}_+^*$   $\alpha_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_f)$ -meßbar. Durch Betrachtung von Positiv- und

Negativteil erhält man die  $\mathcal{Q}(\mathcal{F}')$ -Meßbarkeit eines jeden  $u \in \mathcal{F}$ .

Zur Formulierung des Satzes von Daniell-Stone benötigen wir noch folgende

### 7. Definition:

Eine schwachdefinite reellwertige lineare Abbildung  $I$  auf einem definit erzeugten Stoneschen Vektorverband heißt abstraktes Integral, wenn gilt:

a)  $I(u) \geq 0$  für jedes  $u \in \mathcal{F}_+$ ;

b) Für jede definite isotone Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}$  mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathcal{F}$  gilt  $I(\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I(u_n)$ .

### 8. Bemerkung:

Da  $\mathcal{F}$  als definit erzeugter Stonescher Vektorverband vorausgesetzt ist, ist es sinnvoll zu fordern, daß  $I$  schwachdefinite Abbildung ist. Notwendig ist dies für die Eigenschaft 7.b).

Der nun folgende Satz klärt den Zusammenhang zwischen abstrakten Integralen und Integralen im Sinne von § 4.

### 9. Satz: (Daniell-Stone) [1] 39.4

Sei  $\Omega$  schwachdefinite Menge,  $\mathcal{F}$  definit erzeugter Stonescher Vektorverband reeller schwachdefiniter Funktionen auf  $\Omega$ , ( $\mathcal{F}$  mit Erzeugendensystem  $\mathcal{F}'$ ) und  $I$  ein abstraktes Integral auf  $\mathcal{F}$ . In  $\mathcal{F}_+$  existiere eine definite isotone Folge  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u'_n(\omega) > 0$  für alle  $\omega \in \Omega$  und  $\sup_{n \in \mathbb{N}} I(u'_n) < +\infty$ .

Dann existiert genau ein Maß  $\mu$  auf der  $\mathbb{C}$ -Algebra  $\mathcal{Q}(\mathcal{F}')$  mit folgenden Eigenschaften:

a) Jedes  $u \in \mathcal{F}$  ist  $\mu$ -integrierbar und es gilt  $I(u) = \int u \, d\mu$ .

b)  $\mu(A) = \inf_{\substack{G \in \mathcal{Q} \\ A \in G}} \mu(G)$  für jedes  $A \in \mathcal{Q}(\mathcal{F}')$ .

### Beweis:

1) Für jede definite isotone Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$  und jedes  $v \in \mathcal{F}_+$  gilt  $I(v) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} I(u_n)$ , falls  $v \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ . Denn definiert man für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $v_n := \inf(v, u_n)$ , so ist

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite isotone Folge in  $\mathcal{F}_+$  mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} v_n = \inf(v, \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n) = v \in \mathcal{F}_+.$$

Aus der Definition des abstrakten Integrals folgt dann

$I(v) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I(v_n)$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt aber  $v_n \leq u_n$ , also

$I(v_n) \leq I(u_n)$  und somit  $I(v) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} I(u_n)$ .

2) Für je zwei definite isotone Folgen  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$  gilt  $\sup_{n \in \mathbb{N}} I(u_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I(v_n)$ , falls  $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$ .

Denn für jedes  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $v_m = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  und  $u_m < \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$ , also folgt aus 1)  $I(v_m) < \sup_{n \in \mathbb{N}} I(u_n)$  und  $I(u_m) < \sup_{n \in \mathbb{N}} I(v_n)$ .

Hieraus ergibt sich aber die Behauptung.

3) Somit kann man für jedes  $f \in \mathcal{F}_+^*$  definieren:  $I'(f) := \sup I(u_n)$ .

$I'$  ist schwachdefinite numerische Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a)  $I'(u) = I(u)$  für jedes  $u \in \mathcal{F}_+$ ;

b)  $I'$  ist isoton;

c)  $I'$  ist additiv und positiv homogen;

d)  $I'(f_1) + I'(f_2) = I'(\sup(f_1, f_2)) + I'(\inf(f_1, f_2))$  für beliebige  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_+^*$ ;

e)  $I'(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I'(f_n)$  für jede definite isotone Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+^*$ .

Nur e) ist zu zeigen. Hierzu genügt es, die Existenz einer definiten isotonen Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen aus  $\mathcal{F}_+$  nachzuweisen, die den Bedingungen  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$  und  $v_n < f_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  genügt. Dann liegt  $f$  in  $\mathcal{F}_+^*$  und es gilt

$I(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I(v_n)$  nach Definition und  $I'(v_n) < I'(f_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Folglich erhält man  $I(f) < \sup_{n \in \mathbb{N}} I(f_n)$  und damit die Behauptung, weil wegen 1) aus  $f_n < f$   $I(f_n) < I(f)$  folgt. Die Existenz von  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ergibt sich wie im Beweis von Hilfssatz 5.a).

4) Somit ist durch  $\mu'(G) := I'(1_G)$  für alle  $\mathcal{F}$ -offenen Mengen  $G \in \mathcal{G}$  eine schwachdefinite Mengenfunktion definiert mit folgenden Eigenschaften:

a)  $\mu'(\emptyset) = 0$ ;

b)  $\mu'$  ist isoton;

c)  $\mu'$  ist additiv;

d)  $\mu'(G_1) + \mu'(G_2) = \mu'(G_1 \cup G_2) + \mu'(G_1 \cap G_2)$  für beliebige Mengen  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ ;

e)  $\mu'$  ist von unten stetig;

f)  $\mu'(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(G_n)$  für jede definite Folge  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{G}$ .

Wegen 3) ist nur noch f) zu zeigen. Sei also  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge  $\mathcal{F}$ -offener Mengen.

Wegen  $1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_{G_n}$  und 3) gilt

$$\begin{aligned} \mu'(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) &= I'(1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n}) \leq I'(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{G_n}) = I'(\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n 1_{G_i}) = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} I'(\sum_{i=1}^n 1_{G_i}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n I'(1_{G_i}) = \sum_{n=1}^{\infty} I'(1_{G_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(G_n). \end{aligned}$$

5) Es ist  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  mit einer definiten Folge  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathcal{F}$ -offener Mengen mit  $\mu'(G_n) < +\infty$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sei  $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} u'_n$  mit der laut Voraussetzung existierenden definiten isotonen Folge  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}_+$ . Dann ist  $0 \leq f \in \mathcal{F}_+^*$  und  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ , wobei  $G_k := \{f > 1/k\}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und es gilt  $\mu'(G_k) \leq k I'(f) = k \sup_{n \in \mathbb{N}} I(u_n)$ , da  $1_{G_k} \leq kf$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

Wegen Hilfssatz 5 und 6 und Teil 4 dieses Beweises kann jetzt die Fortsetzungstheorie aus § 3 angewendet werden. Man bekommt also genau ein Maß  $\mu$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ , für das noch die Eigenschaft a) aus der Behauptung des Satzes 9 nachgewiesen werden muß, denn 9.b) folgt aus der Konstruktion in § 3.

6)  $\mu$  erfüllt die Bedingungen 9.a), denn für  $u \in \mathcal{F}_+$  gilt

$$\begin{aligned} u &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} 1_{\left\{ \frac{i}{2^n} < u \leq \frac{i+1}{2^n} \right\}} + 1_{\{u < n\}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} 1_{\left\{ \frac{i}{2^n} < u \right\}}, \end{aligned}$$

isoton sind.

Für  $u \in \mathcal{F}$  folgt die Behauptung durch Betrachtung des Positiv- und Negativteils von  $u$ .

## § 8. Regularität endlicher Borel-Maße

Sei  $(E, d)$  separabler metrischer Raum und  $\mathcal{B}_d$  definite Basis der Topologie von  $(E, d)$  (vergl. Anhang 3 § 2.2.c)).

$\mathcal{C}(E)$  bzw.  $\mathcal{C}^b(E)$  sei der Stonesche Vektorverband der stetigen reellen bzw. stetigen reeller beschränkten schwach-definiten Funktionen auf  $E$ .

### 1. Definition:

- $\mathcal{B}(E) := \mathcal{O}_c(\mathcal{B}_d)$  heißt die  $\sigma$ -Algebra der Borelschen Mengen in  $E$ .
- Jedes auf  $\mathcal{B}(E)$  definierte endliche Maß heißt endliches Borel-Maß auf  $E$ .

Unser Ziel ist die Spezialisierung des Satzes von Daniell-Stone auf gewisse separable metrische Räume und der Beweis einer zu § 7.11.b) ähnlichen "Regularitätsbedingung", die topologisch wichtige Mengen verwendet. Zur Vorbereitung dient die folgende

### 2. Definition:

Eine Teilmenge  $A$  von  $E$  heißt  $F_\sigma$ -Menge bzw.  $G_\delta$ -Menge, wenn sie Vereinigung bzw. Durchschnitt einer definierten Folge abgeschlossener bzw. offener Mengen in  $E$  ist.

### 3. Hilfssatz: [1] 40.2

Für jede Teilmenge  $G$  von  $E$  sind äquivalent:

- $G$  ist  $\mathcal{C}(E)$ -offen;
- $G$  ist  $\mathcal{C}^b(E)$ -offen;
- $G$  ist offene  $F_\sigma$ -Menge;
- In  $\mathcal{C}^b(E)$  existiert eine Funktion  $f$  mit  $G = \{f > 0\}$ .

### Beweis:

- $\Rightarrow$  b): Ist  $G$   $\mathcal{C}(E)$ -offen und  $1_G = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  mit definierter isotoner Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{C}(E)$ , so ist jedes  $u_n$  wegen  $0 \leq u_n \leq 1_G$  beschränkt.
- $\Leftarrow$  c): Ist  $G$   $\mathcal{C}^b(E)$ -offen, so gibt es eine definite isotone Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{C}^b(E)$  mit  $1_G = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ . Da jedes  $u_n$  stetig ist, ist wegen § 2.2.i) in Anhang 3  $\{u_n > 0\}$  offen und  $\{u_n > \frac{1}{k}\}$  abgeschlossen für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Somit ist  $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{u_n > \frac{1}{k}\}$  als Vereinigung einer definierten Folge offener Mengen offen und wegen  $G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{u_n > \frac{1}{k}\}$  eine  $F_\sigma$ -Menge.

c)  $\Rightarrow$  d): Ist  $G$  offene  $F_G$ -Menge, so gibt es eine definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abgeschlossener Mengen mit  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Da  $A_n$  und  $\bigcap G$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  disjunkte abgeschlossene Mengen sind, gibt es nach dem Satz von Urysohn (vergl. Anhang 3 § 2.4.g) eine Funktion  $f_n \in \mathcal{C}^b(E)$  mit  $0 \leq f_n \leq 1$ ,  $f_n(x) = 0$  für alle  $x \in \bigcap G$  und  $f_n(x) = 1$  für alle  $x \in A_n$ .

Durch die auf  $E$  gleichmäßig konvergente Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n(x)$  wird eine Funktion  $f \in \mathcal{C}^b(E)$  definiert. (Die Definition der gleichmäßigen Konvergenz einer definiten Funktionenfolge in  $\mathcal{C}^b(E)$  und der Beweis des hier verwendeten Ergebnisses können wörtlich aus der axiomatischen Mathematik übernommen werden.)

Auf Grund der Konstruktion von  $f$  gilt  $G = \{f > 0\}$ .

d)  $\Rightarrow$  a): Dies ergibt sich aus Hilfssatz 3.a) in § 7.

Will man den Satz von Daniell-Stone auf die Situation  $\Omega = E$  und  $\mathcal{F} = \mathcal{C}^b(E)$  anwenden, so muß geklärt werden, ob die zentrale Voraussetzung § 7.6 erfüllt ist, d.h. ob in  $\mathcal{C}^b(E)$  eine definite Teilmenge  $\mathcal{F}'$  existiert, sodaß jedes  $f \in \mathcal{C}^b(E)$  punktwiser Limes einer definiten Folge in  $\mathcal{F}'$  ist. Dies wird durch den nächsten Satz beantwortet.

#### 4. Satz:

In  $\mathcal{C}^b(E)$  existiert eine definite Menge  $\mathcal{F}'$  der Art, daß jedes  $f \in \mathcal{C}^b(E)$  punktwiser Limes einer definiten Folge von Funktionen aus  $\mathcal{F}'$  ist.

#### Beweis:

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $E$  mit  $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = E$ .

a) Für beliebige  $f, g \in \mathcal{C}^b(E)$  werde definiert

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f(x_n) - g(x_n)|.$$

1)  $d$  ist Metrik auf  $\mathcal{C}^b(E)$ , denn sei  $d(f, g) = 0$  für  $f, g \in \mathcal{C}^b(E)$ , dann ist  $2^{-n} |f(x_n) - g(x_n)| \leq d(f, g) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Also gilt  $f(x_n) = g(x_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $f$  und  $g$  stetig sind und zu jedem  $x \in E$  eine definite Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert mit  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ , gilt wegen § 2.2.e) aus

$$\text{Anhang 3 } f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_{n_k}) = g(x).$$

Ist umgekehrt  $g = f$ , so ist  $|f(x_n) - g(x_n)| = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , also auch  $d(f, g) = 0$ .

Die Symmetrie und die Dreiecksungleichung sind klar.

2) Konvergiert eine definite Folge  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{C}^b(E)$  bezüglich der Metrik  $d$  gegen ein  $g \in \mathcal{C}^b(E)$ , so konvergiert  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  auch punktweise gegen  $g$ , denn sei  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  beliebig. Dann existiert  $m_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_m(x_n) - g(x_n) < \varepsilon$  für alle  $m \geq m_0$ . Also ist  $2^{-n} |f_m(x_n) - g(x_n)| < \varepsilon$  für alle  $m \geq m_0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) punktweise gegen  $g$ . Wegen der Stetigkeit von  $g$  und  $f_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) ergibt sich die punktweise Konvergenz für jedes  $x \in E$  wie folgt:

Es gilt  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$  mit definiter Folge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und zu jedem

$\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|f_m(x) - f_m(x_{n_k})| < \varepsilon$  für alle  $k \geq k_0$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  und es ist

$|g(x) - g(x_{n_k})| < \varepsilon$  für alle  $k \geq k_0$ . Somit ergibt sich

$$|f_m(x) - g(x)| \leq |f_m(x) - f_m(x_{n_k})| + |f_m(x_{n_k}) - g(x_{n_k})| + |g(x_{n_k}) - g(x)|$$

$\leq 3\varepsilon$  für hinreichend große  $k \in \mathbb{N}$ .

b) Zu je endlich vielen verschiedenen Folgengliedern

$x_1, \dots, x_k$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existieren Urysohn-Funktionen  $f_1, \dots, f_k$  mit  $f_i(x_i) = 1$  ( $i = 1, \dots, k$ ) und  $f_i(x_j) = 0$  für  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, k$ ), da die einpunktigen Mengen  $\{x\}$  ( $x \in E$ ) abgeschlossen sind wegen  $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{1/n}(x)$ .

Sei  $\mathcal{F}'$  die Menge der rationalen Vielfachen dieser (definit

gegebenen) Funktionen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit enthalte  $\mathcal{F}'$  mit je endlich vielen rationalen Vielfachen von Urysohn-Funktionen auch deren Supremum.

c) Sei nun  $g \in \mathcal{C}^b(E)$  gegeben.

Sei  $c := \sup_{n \in \mathbb{N}} |g(x_n)|$  und  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  beliebig. Bestimme nun  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, daß  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n}(c+1) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Auf den Punkten  $x_1, \dots, x_{n_0}$

approximiere man  $g(x_i)$  ( $i = 1, \dots, n_0$ ) mit Hilfe der Urysohn-Funktionen  $f_1, \dots, f_{n_0}$  aus b) und rationalen Zahlen  $r_1, \dots, r_{n_0}$ , sodaß für  $f'_{n_0} := \sup_{1 \leq i \leq n_0} r_i f_i$  gilt:  $\sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} |f'_{n_0}(x_n) - g(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Wegen § 2.2.g) in Anhang 3 wissen wir, daß jede offene Menge  $O$  in  $E$  eine  $\mathcal{F}_c$ -Menge ist, was aber nach Hilfssatz 3 genau dann der Fall ist, wenn  $O \in \mathcal{C}^b(E)$ -offen ist. Die

$\mathcal{C}^b(E)$ -offenen Mengen erzeugen aber nach Hilfssatz § 7.6 die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{O}(\mathcal{F}')$ . Also ist  $\mathcal{B}(E) = \mathcal{O}(\mathcal{F}')$ .

Somit gilt der

**5.Satz:**

Zu jedem abstrakten Integral  $I$  auf  $\mathcal{C}^b(E)$  existiert genau ein auf  $\mathcal{G}(E)$  definiertes endliches Maß  $\mu$  derart, daß jedes  $f \in \mathcal{C}^b(E)$   $\mu$ -integrierbar ist und  $I(f) = \int f d\mu$  gilt.

Zur Formulierung der weiteren Ergebnisse benötigen wir folgende

**6.Definition:**

Ein auf  $\mathcal{G}(E)$  definiertes Maß  $\mu$  heißt regulär, wenn für jede Menge  $A \in \mathcal{G}(E)$  gilt:

$\mu(A) = \inf \{ \mu(G) : A \subseteq G, G \text{ offen} \}$  "äußere Regularität";

$\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt} \}$  "innere Regularität".

**7.Satz:**

Sei  $P$  polnischer Raum. Dann ist jedes endliche Borel-Maß auf  $P$  regulär.

**Beweis:**

a) "Äußere Regularität": aus dem Satz von Daniell-Stone § 7.9 und Hilfssatz 3 folgt die äußere Regularität, da wegen Anhang 3, § 2.2.g) jede offene Menge eine  $F_\sigma$ -Menge ist.

b) "Innere Regularität": ist  $B \in \mathcal{G}(P)$ , so folgt aus

$\mu(B) = \mu(P) - \mu(P \setminus B)$  und a), daß

$\mu(B) = \sup \{ \mu(A) : A \text{ abgeschlossene } G_\delta\text{-Menge in } B \}$  gilt.

Da jede abgeschlossene Menge in  $P$  sogar  $G_\delta$ -Menge ist, genügt

es, die innere Regularität für abgeschlossene Mengen  $A \subseteq P$

zu zeigen. Sei also  $A$  abgeschlossene Teilmenge von  $P$  und  $K$  kompakte Teilmenge von  $P$ . Dann ist  $A \cap K$  kompakt (Anhang 3, § 2.9.b)) und es gilt  $\mu(A) - \mu(K \cap A) = \mu(A \setminus K) \leq \mu(K) \leq \mu(P) - \mu(K)$ . Somit bleibt zu zeigen, daß für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$

eine kompakte Teilmenge  $K \subseteq P$  mit  $\mu(P) - \mu(K) < \varepsilon$  existiert.

Da  $P$  polnisch ist, ist  $P$  homöomorph zu einer Teilmenge  $P'$  von  $[0,1]^{\mathbb{N}}$  und somit ist  $P'$  eine  $G_\delta$ -Menge in  $[0,1]^{\mathbb{N}}$ .

(Anhang 3, § 2.12), d.h.  $P' = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$ , wobei  $U_m$  offen in  $[0,1]^{\mathbb{N}}$ .

Da  $[0,1]^{\mathbb{N}}$  metrischer Raum ist, ist jedes  $U_m$   $F_\sigma$ -Menge (Anhang 3, § 2.2.g)), d.h.

$U_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{mn}$ , wobei  $A_{mn}$  abgeschlossen in  $[0,1]^{\mathbb{N}}$ .

Da  $[0,1]^{\mathbb{N}}$  präkompakt (Anhang 3, § 2.11) und vollständig ist (Anhang 3, § 2.10), ist  $[0,1]^{\mathbb{N}}$  kompakt (Anhang 3, § 2.8) und somit ist jedes  $A_{mn}$  sogar kompakt (Anhang 3, § 2.9.b)).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann für jedes  $m \in \mathbb{N}$  die Folge  $(A_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$  als aufsteigend angenommen werden. Sei  $f: P' \rightarrow P$  die oben erwähnte Homöomorphie und  $r < \mu(P)$ . Wir konstruieren durch vollständige Induktion eine definite Folge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft  $\mu(f(A_{kn_k} \cap \dots \cap A_{1n_1} \cap P')) > r$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

Induktionsanfang:

$(f(A_{1n} \cap P'))_{n \in \mathbb{N}}$  ist definite isotone Folge Borelscher Mengen  $(\times)$  in  $P$  mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_{1n} \cap P') = P$ . Somit existiert  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(f(A_{1n_1} \cap P')) > r$ .

Seien  $n_1, \dots, n_k$  schon konstruiert.

$(f(A_{k+1,n} \cap A_{kn_k} \cap \dots \cap A_{1n_1} \cap P'))_{n \in \mathbb{N}}$  ist definite isotone Folge Borelscher Mengen in  $P$  mit  $(\times) \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_{k+1,n} \cap A_{kn_k} \cap \dots \cap A_{1n_1} \cap P') = f(A_{kn_k} \cap \dots \cap A_{1n_1} \cap P')$ . Somit existiert  $n_{k+1} \in \mathbb{N}$  mit

$\mu(f(A_{k+1,n_{k+1}} \cap A_{kn_k} \cap \dots \cap A_{1n_1} \cap P')) > r$ .

Setzt man nun  $K_j := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn_k}$ , so ist  $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$  definite antitone Folge kompakter Mengen in  $[0, 1]^N$  und  $K := \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$  kompakte Teilmenge von  $P'$ .

Wenn wir zeigen, daß  $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n \cap P') = f(K)$ , so ist die Behauptung bewiesen, denn  $f(K)$  ist kompakt (Anhang 3, § 2.9.d) und es ist  $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n \cap P')) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f(K_n \cap P')) > r$ .

Es ist klar, daß  $f(K) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n \cap P')$ .

Ist umgekehrt  $x \in P \setminus f(K)$ , so existiert wegen der Regularität von  $P$  eine abgeschlossene Umgebung  $U$  von  $f(K)$  mit  $x \notin U$ .

$f^{-1}(U)$  ist Umgebung von  $K$  in  $P'$ , also existiert eine Umgebung  $V$  von  $K$  in  $[0, 1]^N$  mit  $V \cap P' = f^{-1}(U)$ .

Da  $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = K$ , existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $K_n \subseteq V$ , woraus  $K_n \cap P' \subseteq V \cap P' = f^{-1}(U)$  folgt. Somit gilt  $f(K_n \cap P') \subseteq U$  und  $f(K_n \cap P') \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n \cap P')$  zur Folge hat.

### 8. Bemerkung:

Axiomatisch läßt sich zeigen ([15], Chapter II, Th.10), daß jedes endliche Borel-Maß auf einem Souslin-Raum  $E$  (das ist ein topologischer Raum, der das Bild eines polnischen Raumes  $P$  unter einer stetigen Surjektion ist) von innen regulär ist. Könnte man dies auch konstruktiv beweisen, so wäre die in § 14.6 angegebene Definition eines  $W$ -Raumes zu eng gefaßt und müßte auf Souslin-Räume erweitert werden, die metrisierbar sein müssen, da Satz § 10.5 anwendbar sein muß.

Dem stehen aber folgende Schwierigkeiten entgegen:

a) In der konstruktiven Mathematik müßte man in der Definition des Souslin-Raumes  $E$  noch fordern, daß  $E$  eine abzählbare Basis besitzt. Legt man sogar noch auf die äußere Regularität Wert, so muß  $E$  sogar metrisierbar sein, damit der für die Anwendung des Satzes von Daniell-Stone so wichtige Satz 4 zur Verfügung steht. In diesem Falle wäre also die Verallgemeinerung nur minimal.

b) Ist  $E$  ein Souslin-Raum mit abzählbarer Basis und versucht man, den Beweis von Satz 7 zu übertragen, so entsteht folgende Situation ( mit den Bezeichnungen aus dem Beweis ) :

$f$  ist nun nicht mehr eine Homöomorphie von  $P'$  auf  $P$ , sondern eine stetige Surjektion von  $P'$  auf  $E$  ( entstanden durch Hintereinanderschaltung der Homöomorphie und der nach Definition existierenden stetigen Surjektion ). Versucht man

nun in analoger Weise eine definite Folge natürlicher Zahlen zu konstruieren, so gelten zwar noch die Gleichungen  $(*)$ , aber die auftretenden Mengen sind im allgemeinen keine Borel-Mengen mehr, sodaß das Maß  $\mu$  nicht mehr existiert. Versucht man nun, zum äußeren Maß überzugehen, so ergibt sich ( ohne Beschränkung der Allgemeinheit für  $A := A_{11}$  )

$$\mu^*(f(A \cap P')) = \inf_{O \in \mathcal{U}} \mu(O), \text{ wobei}$$

$$\mathcal{U} := \{ O \subseteq E : O \text{ offen und } O \supseteq f(A \cap P') \}.$$

Zu zeigen wäre also, daß  $R(\mathcal{U}) := \{ r \in \mathbb{Q} : r > \mu(O) \text{ für ein } O \in \mathcal{U} \}$  definit ist. Sei hierzu

$$\mathcal{U} := \{ O \subseteq [0,1]^N : O \text{ offen und } O \supseteq A \cap P' \}.$$

In  $\mathcal{U}$  existiert nach Voraussetzung eine definite Folge, die eine definite Darstellung der Rechtsklasse  $R(\mathcal{U})$  bewirkt.

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Man bemerkt, daß  $f^{-1}[R(\mathcal{U}')] := R(f^{-1}(\mathcal{U}'))$  Teilmenge von  $R(\mathcal{U})$  ist, die aber im allgemeinen indefinit ist.

Selbst wenn  $f^{-1}[R(\mathcal{U})]$  definit wäre, könnte man aber noch nicht auf die Existenz einer definiten Teilmenge in schließen, die eine definite Darstellung von  $R(\mathcal{U}')$  bewirkt.

2. Man bemerkt, daß  $f^{-1}(\mathcal{U}') \subseteq \mathcal{U}$ , und versucht mit Hilfe der nach Voraussetzung existierenden definiten Folge in  $\mathcal{U}$  ( die eine definite Darstellung von  $R(\mathcal{U})$  gestattet ) eine definite Folge in  $f^{-1}(\mathcal{U}')$  auszuwählen. Dies scheitert im allgemeinen, da  $f^{-1}(\mathcal{U}')$  indefinit ist und sich somit der

Auswahlsatz nicht anwenden läßt.

c) Versucht man unabhängig von dem in Satz 7 gegebenen Beweis einmal eine Darstellung eines Bildes einer Borel-Menge  $B$  unter einer stetigen Abbildung  $f$ , so kann man axiomatisch mittels der sogenannten  $(\#)$ -Operation ([6] § 3.XIV) zeigen, daß  $f(B)$  die überabzählbare Vereinigung gewisser abgeschlossener Mengen ist ([6] § 39.II). Wollte man hier von der Meßbarkeit der zur Darstellung verwendeten abgeschlossenen Mengen auf die Meßbarkeit von  $f(B)$  schließen, so müßte man aus einer überabzählbaren (indefiniten) Menge eine definite auswählen, sodaß es den Anschein hat, als ob bei konstruktiver Interpretation der  $(\#)$ -Operation nur abzählbare Vereinigungen auftreten dürfen und somit bei der Anwendung auf den Fall des stetigen Bildes einer Borel-Menge auch keine Aussage über die Meßbarkeit möglich ist.

Für einen metrisierbaren Souslin-Raum  $E$ , der ja speziell ein separabler Raum ist, bestätigt sich also die schon in der Einleitung erwähnte Tatsache, daß selbst bei separablen metrischen Räumen die Übertragung in die konstruktive Mathematik nicht zu gelingen braucht.

## § 9. Maße mit Dichten

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  definierter Maßraum und  $\mathcal{E}^*$  die Menge aller  $\mu$ -meßbaren schwachdefiniten numerischen Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $\Omega$ .

Wir zitieren zunächst einige Sätze, deren Beweise wörtlich aus der axiomatischen Mathematik übernommen werden können.

### 1. Satz: [1] 17.1

Für jede Funktion  $f \in \mathcal{E}^*$  wird durch  $A \mapsto \int_A f d\mu$  ein Maß, auf  $\mathcal{A}$  definiert.

### 2. Definition:

a) Das in Satz 1 definierte Maß  $\nu$  heißt das Maß mit der Dichte  $f$  bezüglich  $\mu$ . Es wird mit  $\nu = f\mu$  bezeichnet.

b) Für  $f \in \mathcal{E}^*$  und  $A \in \mathcal{A}$  sei  $\int_A f d\nu := \int_A f f d\mu$ .

### 3. Satz: [1] 17.3

Sei  $\nu = f\mu$  mit  $f \in \mathcal{E}^*$ .

(\*) Dann gilt für jede Funktion  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\int g d\nu = \int gf d\mu$ .

Eine  $\mu$ -meßbare numerische schwachdefinite Funktion  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann  $\nu$ -integrierbar, wenn  $gf$   $\mu$ -integrierbar ist. Auch dann gilt (\*).

### 4. Satz: [1] 17.4

Für je zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{E}^*$  ist  $f\mu = g\mu$ , falls  $f = g$   $\mu$ -fast überall. Ist  $f$  oder  $g$   $\mu$ -integrierbar, so gilt hiervon auch die Umkehrung.

### 5. Bemerkung:

Gegeben seien nun zwei Maße  $\mu, \nu$  auf  $\mathcal{A}$ . Wir wollen untersuchen, wann  $\nu$  eine Dichte bezüglich  $\mu$  besitzt. Notwendig ist wegen Satz § 6.3 die Bedingung, daß jede  $\mu$ -Nullmenge eine  $\nu$ -Nullmenge ist. Dies gibt Anlass zur

### 6. Definition:

Ein Maß  $\nu$  auf  $\mathcal{A}$  heißt stetig bezüglich eines Maßes  $\mu$  auf  $\mathcal{A}$ , kurz  $\mu$ -stetig, wenn jede  $\mu$ -Nullmenge auch eine  $\nu$ -Nullmenge ist.

Der folgende Hilfssatz ist ein entscheidender Schritt im Beweis des Satzes von Radon-Nikodym.

### 7. Hilfssatz: [1] 17.7

Seien  $\sigma$  und  $\tau$  zwei endliche Maße auf  $\mathcal{A}$  mit der Eigenschaft  $\sigma(\Omega) < \tau(\Omega)$ . Dann gibt es eine Menge  $\Omega' \in \mathcal{A}$  mit  $\sigma(\Omega') < \tau(\Omega')$  und  $\sigma(A) \leq \tau(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}$  (wobei  $\mathcal{F}$  definites und ordnungsdefinites Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}$  ist.)

Beweis:

Wegen Satz 6 in § 1 ist  $\mathcal{E}$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Algebra.

Die Funktion  $\delta := \tau - \sigma$  ist auf  $\mathcal{A}$  beschränkt, da  $-\sigma(\Omega) \leq \delta(A) \leq \tau(\Omega)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt und die Maße  $\sigma$  und  $\tau$  endlich sind. Wir können daher mittels vollständiger Induktion definite Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{A}$  wie folgt definieren.

Sei  $A_0 := \emptyset$  und  $\Omega_0 := \Omega \setminus A_0$ .

Sind  $A_0, \dots, A_n$  und  $\Omega_0, \dots, \Omega_n$  bereits konstruiert, so setze man  $a_n := \inf_{A \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{E}} \delta(A)$ . Dieses Infimum existiert konstruktiv, denn definiert man  $\Delta_n := \{ \delta(A) : A \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{E} \}$ , so ist  $\Delta_n$  definite Menge reeller Zahlen, da  $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{E}$  definite Menge und  $\delta$  schwachdefinite Funktion ist. Also ist auch die Rechtsklasse  $R(\Delta_n) := \{ r \in \mathbb{Q} : r > \delta(A) \text{ für ein } A \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{E} \}$  definit. Nun verfährt man wie folgt:

Im Falle  $a_n > 0$  setze man  $A_{n+1} := \emptyset$  und  $\Omega_{n+1} := \Omega_n \setminus A_{n+1}$ .

Im Falle  $a_n \leq 0$  wähle man  $A_{n+1}$  in  $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{E}$  derart, daß

$$\delta(A_{n+1}) < \frac{1}{2} a_n \text{ ist und setze wiederum } \Omega_{n+1} := \Omega_n \setminus A_{n+1}.$$

Somit ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge paarweise disjunkter Mengen. Daher ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta(A_n)$  konvergent (gegen

$\tau(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ , weil  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta(A_n) = \delta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ ), woraus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(A_n) = 0$  und somit offenbar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  folgt.

$(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist definite antitone Folge in  $\mathcal{E}$ . Setzt man also

$$\Omega' := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Omega_n, \text{ so ist wegen Satz 4 aus § 2 } \delta(\Omega') = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\Omega_n).$$

$\Omega'$  leistet das Verlangte, denn es gilt  $\delta(A_{n+1}) \leq 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und daher  $\delta(\Omega_{n+1}) = \delta(\Omega_n) - \delta(A_{n+1}) >$

$$> \delta(\Omega_n) > \dots > \delta(\Omega_0) = \delta(\Omega) > 0.$$

Also ist auch  $\delta(\Omega') = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\Omega_n) > 0$ , woraus  $\sigma(\Omega') < \tau(\Omega')$  folgt. Ist  $A \in \Omega' \cap \mathcal{E}$ , so ist  $\delta(A) \in \Delta_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und somit  $\delta(A) > 0$ .

### 8. Satz: (Radon-Nikodym) [1] 17.8

Seien  $\mu, \nu$  Maße auf einem definiten Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  (mit definitem und ordnungsdefinitem Erzeugendensystem  $\mathcal{E}$ ).

Ist dann  $\mu$   $\sigma$ -endlich, so sind äquivalent:

- a)  $\nu$  besitzt eine Dichte bezüglich  $\mu$ ;
- b)  $\nu$  ist  $\mu$ -stetig.

Beweis:

Wegen Bemerkung 5 ist nur noch b)  $\Rightarrow$  a) zu zeigen.

1. Seien zuerst  $\mu$  und  $\nu$  endlich und  $\mathcal{E}$  sogar Algebra (vergl. § 1.6). Dann definiere man

$\mathcal{F} := \{ \sum_{i=1}^n r_i 1_{A_i} \text{ mit paarweise disjunkten } A_i \in \mathcal{O} \text{ und } r_i \in \mathbb{Q}_+ \}$  und  $\mathcal{G} := \{ g \in \mathcal{F} : \int_{\mathbb{R}} g d\mu \leq \nu(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{E} \}$ .

Für jedes  $g \in \mathcal{G}$  gilt sogar  $\int_{\mathbb{R}} g d\mu \leq \nu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{O}$ , denn sei zunächst  $A \in \mathcal{E}_G$ , d.h.  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  mit definiter isotoner Folge  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{E}$ . Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{E_n} g d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \nu(E_n) = \nu(A).$$

Ist nun  $A \in \mathcal{O}$  beliebig, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu = \inf_{B \in \mathcal{E}_G} \int_B g d\mu \leq \inf_{B \in \mathcal{O} \cap \mathcal{E}_G} \nu(B) = \nu(A) \quad (\text{Wobei die auftretenden Infima wegen § 3 existieren.})$$

$\mathcal{G}$  ist nicht leer (denn  $g=0$  liegt in  $\mathcal{G}$ ) und enthält mit je zwei Funktionen  $g, h$  auch deren Supremum  $\sup(g, h)$ , denn mit den Definitionen  $A_1 := \{g \geq h\}$  und  $A_2 := A_1^c$  ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}} \sup(g, h) d\mu = \int_{A_1} g d\mu + \int_{A_2} h d\mu \leq \nu(A \cap A_1) + \nu(A \cap A_2) = \nu(A) \text{ für jedes } A \in \mathcal{E}.$$

Nun setze man  $\gamma := \sup_{g \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}} g d\mu$ .

Dieses Supremum existiert konstruktiv, denn die Linksklasse  $L(\mathcal{G}) := \{ q \in \mathbb{Q} : q < \int_{\mathbb{R}} g d\mu \text{ für ein } g \in \mathcal{F} \text{ mit } \int_{\mathbb{R}} g d\mu \leq \nu(A) \text{ für jedes } A \in \mathcal{E} \}$  ist definit, denn die definite Menge

$\{ \int_{\mathbb{R}} g' d\mu : g' = \sum_{i=1}^n r_i 1_{E_i} \text{ mit paarweise disjunkten Mengen } E_i \in \mathcal{E} \text{ und } r_i \in \mathbb{Q}_+ \}$  liefert eine definite Darstellung von  $L(\mathcal{G})$ ,

denn das Maß jeder in der Definition von  $g \in \mathcal{G}$  auftretenden Menge kann mit Hilfe von Mengen aus  $\mathcal{E}$  approximiert werden (dies folgt aus Definition § 1.12).

Da  $\int_{\mathbb{R}} g d\mu \leq \nu(\Omega) < +\infty$  für jedes  $g \in \mathcal{G}$ , ist  $\gamma < +\infty$  und es existiert eine definite Folge  $(g'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{G}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g'_n d\mu = \gamma \quad (\text{vergl. Anhang 1}).$$

Definiert man nun  $g_n := \sup(g'_1, \dots, g'_n)$ , so ist  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{G}$  (wegen der oben gezeigten endlichen sup-Stabilität von  $\mathcal{G}$ ) für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu = \gamma$  gilt.

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist sogar isoton, also ist nach Satz § 4, 17

$$f := \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n \text{ eine Funktion mit } \int_{\mathbb{R}} f d\mu = \gamma.$$

Es gilt  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu \leq \nu(A)$  für jedes  $A \in \mathcal{E}$ , denn

$$\int_{\mathbb{R}} g_n d\mu \leq \nu(A) \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und jedes } A \in \mathcal{E}, \text{ also } \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu \leq \nu(A) \text{ für jedes } A \in \mathcal{E}.$$

Wir zeigen nun  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \nu(A)$  für jedes  $A \in \mathcal{E}$ .

Ist dies gezeigt, so ist  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \nu(A)$  für jedes  $A \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$  wegen der Fortsetzungstheorie aus § 3.

Definiert man  $\tau := \gamma - f\mu$ , so ist  $\tau$  endliches  $\mu$ -stetiges Maß auf  $\mathcal{O}$ . Zu zeigen ist nun  $\tau = 0$ .

Angenommen, es gilt  $\tau(\Omega) > 0$ . Wegen der  $\mu$ -Stetigkeit von  $\tau$  ist dann auch  $\mu(\Omega) > 0$ , also die reelle Zahl  $\beta := \frac{\tau(\Omega)}{\mu(\Omega)} > 0$  und somit  $\tau(\Omega) > \beta\mu(\Omega)$ .

Obiger Hilfssatz 7 (für  $\tau$  und  $\tau := \beta\mu$ ) liefert nun die Existenz einer Menge  $\Omega' \in \mathcal{O}$  mit  $\tau(\Omega') > \beta\mu(\Omega')$  und  $\tau(A) > \beta\mu(A)$  für jedes  $A \in \Omega' \cap \mathcal{E}$ .

Für die  $\mathcal{O}$ -meßbare Funktion  $f_0 := f + \beta 1_{\Omega'}$  gilt daher

$\int_{\mathbb{R}} f_0 d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu + \beta\mu(\Omega' \cap \Omega) \leq \int_{\mathbb{R}} f d\mu + \tau(A) = \gamma(A)$  für jedes  $A \in \mathcal{E}$  und

$\int_{\mathbb{R}} f_0 d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu + \beta\mu(\Omega') = \gamma + \beta\mu(\Omega') > \gamma$ , da  $\mu(\Omega') > 0$  wegen  $\tau(\Omega') > \beta\mu(\Omega')$  und der  $\mu$ -Stetigkeit von  $\tau$ .

Wenn wir noch zeigen  $\int_{\mathbb{R}} f_0 d\mu \leq \gamma$ , so ist die Annahme  $\tau(\Omega) > 0$  zum Widerspruch geführt.

Wir behaupten nun: Für jede  $\mathcal{O}$ -meßbare Funktion  $h \geq 0$  mit

$\int_{\mathbb{R}} h d\mu \leq \gamma(A)$  für jedes  $A \in \mathcal{E}$  ist  $\int_{\mathbb{R}} h d\mu \leq \gamma$ .

Dies folgt aus Bemerkung § 4.16.b), wonach  $h = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$  mit definierter isotoner Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $\mathcal{O}$ -Elementarfunktionen ist, wobei jedes  $u_n$  in  $\mathcal{F}$ , ja sogar in  $\mathcal{O}$  liegt, denn gälte

$\int_{\mathbb{R}} u_n d\mu > \gamma(A)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $A \in \mathcal{E}$ , so wäre  $\int_{\mathbb{R}} h d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} u_n d\mu > \gamma(A)$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

2) Sei  $\mu(\Omega) < \tau(\Omega) = +\infty$ .

Dann existiert eine definite Folge  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  paarweise disjunkter Mengen  $\Omega_n \in \mathcal{O}$  mit  $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$  und folgenden Eigenschaften:

- Für jedes  $A \in \mathcal{O} \cap \Omega_0$  gilt entweder  $\mu(A) = \tau(A) = 0$  oder  $\mu(A) > 0$  und  $\tau(A) = +\infty$ ;
- $\tau(\Omega_n) < +\infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Konstruktion geschieht wie folgt:

Sei  $\mathcal{Q} := \{Q \in \mathcal{O} : \tau(Q) < +\infty\}$  und  $a := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(Q)$ .

Dieses Supremum existiert konstruktiv, denn die Linksklasse  $L(\mathcal{Q}) := \{r \in \mathbb{Q} : r < \mu(Q) \text{ für ein } Q \in \mathcal{Q}\}$  kann definit dargestellt werden durch  $\{\mu(E) : E \in \mathcal{E} \text{ mit } \tau(E) < +\infty\}$ .

Denn zu jedem  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $r < \mu(Q)$  für ein  $Q \in \mathcal{Q}$  existiert wegen Definition § 1.12 ein  $E \in \mathcal{E}$  mit  $r < \mu(E) < +\infty$  (da  $\mathcal{E}$  Algebra ist).

Somit existiert eine (sogar isotone) definite Folge  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{Q}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Q_n) = a$ .

$Q_0 := \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$  liegt in  $\mathcal{Q}$  und  $\Omega_0 := \mathcal{Q}_{Q_0}$  besitzt die Eigenschaft a), denn ist  $A \in \Omega_0 \cap \mathcal{O}$  mit  $\gamma(A) < +\infty$ , so ist  $Q_m \cup A \in \mathcal{Q}$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  und somit  $\mu(Q_m \cup A) \leq a$ , woraus  $\mu(Q_0 \cup A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(Q_m \cup A) \leq a$  folgt. Da  $A$  und  $Q_0$  disjunkt sind, ist also  $\mu(Q_0 \cup A) = a + \bar{\mu}(A) \leq a$  und somit  $\bar{\mu}(A) = 0$ .

Da  $\gamma$  nach Voraussetzung  $\mu$ -stetig ist, folgt hieraus a).

Für die Eigenschaft b) setze man

$$\Omega_1 := Q_1 \text{ und } \Omega_n := Q_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i \quad (n \geq 2).$$

Bezeichnet nun  $\mu_n$  und  $\gamma_n$  die Restriktion von  $\mu$  bzw.  $\gamma$  auf die  $\sigma$ -Algebra  $\Omega_n \cap \mathcal{O}$  in  $\Omega_n$ , so ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $\gamma_n$  ein  $\mu_n$ -stetiges Maß,  $\gamma_n$  und  $\mu_n$  endlich.

Wegen 1) gibt es also eine  $\Omega_n \cap \mathcal{O}$ -meßbare schwach-definite Funktion  $f_n \geq 0$  auf  $\Omega_n$  mit  $\gamma_n = f_n \mu_n$ . Wegen Eigenschaft a) ist  $f_0 := +\infty$  eine Dichte von  $\gamma_0$  bezüglich  $\mu_0$ . Die aus den Funktionen  $f_n (n \in \mathbb{N}_0)$  zusammengesetzte Funktion auf  $\Omega$  erfüllt die Behauptung.

3) Ist  $\mu$   $\sigma$ -endlich, so existiert nach § 1.6.a) eine definite Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen  $A_n \in \mathcal{E}$  mit  $\mu(A_n) < +\infty$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Auf den definiten Maßräumen  $(A_n, \mathcal{A}_n \cap \mathcal{O})$  erfüllen die Restriktionen  $\mu_n$  und  $\gamma_n$  von  $\mu$  bzw.  $\gamma$  auf  $A_n \cap \mathcal{O}$  die Voraussetzungen der Fälle 1 und 2.

## 9. Bemerkung:

a) Wie üblich zeigt man, daß in der Situation des Satzes 8 die Dichte  $\mu$ -fast überall eindeutig bestimmt ist.

b) Ist  $\Omega$  sogar polnischer Raum und  $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\Omega)$ , so kann man im Beweis von Satz 8 Teil 1  $\mathcal{F}$  sogar noch weiter verkleinern. Setzt man

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i 1_{O_i} : r_i \in \mathbb{Q}^+, \text{ wobei die } O_i \text{ paarweise disjunkt sind} \right.$$

und entweder  $\mathcal{O}_i$  oder  $O_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{in}$  mit definiter isotoner Folge  $(E_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{E}$   $\left. \right\}$ , so läßt sich der Beweis wie angegeben führen, da (wegen § 8.7)  $\int 1_M d\mu$  für eine beliebige Menge  $M \in \mathcal{B}(\Omega)$  durch Integrale von Funktionen aus  $\mathcal{F}$  approximiert werden kann.

## § 10. Schwache Konvergenz von Maßen

Sei  $(E, d)$  separabler metrischer Raum,  $D$  definite Teilmenge von  $E$  mit  $\bar{D}=E$ ,  $\mathcal{U}^b(E)$  die Menge aller beschränkten gleichmäßig stetigen schwachdefiniten Funktionen auf  $E$  und  $\mathcal{M}_+^1(E)$  die Menge aller Maßes auf  $\mathcal{O}_c(\mathbb{R}_d)$  (der  $\sigma$ -Algebra der Borelschen Mengen in  $E$ ) mit der Eigenschaft  $\mu(E)=1$ .

Da wir nur an Satz 5 interessiert sind und nicht an einer allgemeinen Diskussion der schwachen Topologie, ist die Darstellung so abgefaßt, daß dieses Ziel so schnell wie möglich erreicht wird. Insbesondere ist hierdurch die Wahl von  $\mathcal{U}^b(E)$  an Stelle von  $\mathcal{C}^b(E)$  in Definition 1 motiviert. Axiomatisch sind diese beiden Zugänge äquivalent (vergl. z.B. [13] II.6.1), während hier auf den Beweis verzichtet wird.

### 1. Definition:

Eine definite Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Maßen in  $\mathcal{M}_+^1(E)$  heißt schwach konvergent gegen ein Maß  $\mu \in \mathcal{M}_+^1(E)$ , wenn gilt:  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\mu_n = \int g d\mu \quad \text{für jedes } g \in \mathcal{U}^b(E).$$

### 2. Bemerkung:

Sei  $x \in E$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $x$  konvergierende definite Folge in  $E$ . Dann konvergiert  $(\varepsilon_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$  schwach gegen  $\varepsilon_x$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  und  $\int f d\varepsilon_{x_n} = f(x)$  für jedes  $x \in E$  und  $f \in \mathcal{U}^b(E)$  gilt. Insbesondere kann wegen der Separabilität von  $E$  für jedes  $x \in E$  eine gegen  $x$  konvergierende definite Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$  gewählt werden.

### 3. Definition:

Jedes Maß auf  $E$  von der Form  $\sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_{x_i}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in E$ ,  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}_+$ ) heißt diskretes Maß.

### 4. Bemerkung:

Jedes diskrete Maß auf  $E$  liegt in  $\mathcal{M}_+^1(E)$ .

### 5. Satz: [13] II.6.3

Zu jedem  $\mu \in \mathcal{M}_+^1(E)$  existiert eine definite Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diskreter Maße  $\mu_n \in \mathcal{M}_+^1(E)$ , die schwach gegen  $\mu$  konvergiert. Dabei können die  $\mu_n$  so gewählt werden, daß die zugehörigen  $x_{ni}$  sogar in  $D$  liegen.

### Beweis:

a) Wegen Bemerkung 2 kann jedes diskrete Maß approximiert werden durch diskrete Maße  $\sum_{i=1}^{n_i} a_{ni} \varepsilon_{x_{ni}}$ , wobei die zugehörigen  $x_{ni}$  in  $D$  liegen.

b) Jedes Maß  $\mu \in \mathcal{M}_+^1(E)$  von der Form  $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_{x_i}$  mit definiter Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_+$  und definiter Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $E$  kann durch diskrete Maße approximiert werden.

c) Wir zeigen, daß jedes  $\mu \in \mathcal{M}_+^1(E)$  schwacher Limes einer definiten Folge von Maßen  $\mu_n$  der Form  $\mu_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \varepsilon_{x_{ni}}$  ist.

Sei hierzu  $\mu \in \mathcal{M}_+^1(E)$  gegeben.

Da  $E$  separabel ist, existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine definite Folge  $(A_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{O}_G(\mathcal{G})$  mit der Eigenschaft  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ni}$ ,  $A_{ni} \cap A_{nk} = \emptyset$  für  $i \neq k$  und  $\int (A_{ni}) \leq \frac{1}{n}$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ , denn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $E = \bigcup_{y \in \mathcal{O}} K_{1/2^n}(y)$  und da  $D$  definit ist, kann man annehmen, daß  $D$  eine definite Folge z.B.  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ist, also gilt  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{1/2^n}(y_i)$ . Diese Vereinigung kann als diskunkte Vereinigung geschrieben werden nach Hilfssatz 10 aus §1, wobei das dort angegebene Verfahren den Durchmesser der Ausgangsmengen  $K_{1/2^n}(y_i)$  verkleinert.

Sei  $x_{ni} \in A_{ni}$  beliebig. Diese Wahl ist auf definite Weise möglich, da jedes  $A_{ni}$  nach Konstruktion schwachdefinite Teilmenge einer Kugel ist und somit separabel.

Definiert man nun für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $\mu_n := \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{ni}) \varepsilon_{x_{ni}}$ , so liegt jedes  $\mu_n$  in  $\mathcal{M}_+^1(E)$ ,

da die  $A_{ni}$  für festes  $n \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt sind und  $\mu \in \mathcal{M}_+^1(E)$ . Weiterhin ist  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{M}_+^1(E)$ , da die  $x_{ni}$  definit gewählt wurden.

Sei nun  $g \in \mathcal{V}^b(E)$  beliebig. Dann setze man für jedes  $i, n \in \mathbb{N}$   $a_{ni} = \inf_{x \in A_{ni}} g(x)$  und  $b_{ni} = \sup_{x \in A_{ni}} g(x)$ . Diese Suprema und Infima existieren nach Bemerkung §2.2.f) in Anhang 3. Nun gilt

$$\left| \int g d\mu_n - \int g d\mu \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_{ni}} (g - g(x_{ni})) d\mu \right| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} (b_{ni} - a_{ni}) \cdot \int 1 d\mu.$$

$(\sup(b_{ni} - a_{ni}))_{n \in \mathbb{N}}$  ist aber definite Nullfolge, denn  $g$  ist gleichmäßig stetig und  $(\int(A_{ni}))_{n \in \mathbb{N}}$  ist definite Nullfolge gleichmäßig bezüglich  $i$ . Hiermit ist nach Definition 1 die Behauptung gezeigt.

## § 11. Endliche Produktmaße

### 1. Definition:

Seien  $M_1, \dots, M_n$  endlich viele beliebige Mengen.

Dann sei  $\prod_{i=1}^n M_i := M_1 \times \dots \times M_n$  die im allgemeinen indefinite Menge aller geordneten  $n$ -Tupel von Elementen  $m_i \in M_i$ .

### 2. Bemerkung:

a) Äquivalent zu 1 kann man  $\prod_{i=1}^n M_i$  wir folgt definieren:

$\prod_{i=1}^n M_i$  sei die Menge aller definiten Abbildungen

$m: \{1, \dots, n\} \rightarrow \prod_{i=1}^n M_i$  mit  $m(i) \in M_i$  ( $i=1, \dots, n$ ).

b) In § 13 Bemerkung 6.d) und 6.f) wird genauer erklärt, warum man sich auf definite Abbildungen beschränken muß und unter welchen Bedingungen  $\prod_{i=1}^n M_i \neq \emptyset$  ist.

c) Es gelten die üblichen Rechenregeln, z.B. für  $n=2$ :

1)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \times \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n$  für je zwei definite Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $M_1$  bzw.  $M_2$ .

2)  $(A \setminus A') \times B = (A \times B) \setminus (A' \times B)$  und

$A \times (B \setminus B') = (A \times B) \setminus (A \times B')$ , falls  $A, A' \subseteq M_1$  und  $B, B' \subseteq M_2$ .

3)  $(A \times B) \setminus (A' \times B') = ((A \setminus A') \times B) \cup (A \times (B \setminus B'))$  und  
 $(A \times B) \setminus (A' \times B') = ((A \setminus A') \times B) \cup ((A \cap A') \times (B \setminus B'))$ ,  
 falls  $A, A' \subseteq M_1$  und  $B, B' \subseteq M_2$ . In der zweiten Gleichung ist die Vereinigung sogar disjunkt.

### 3. Definition:

Seien  $M_1, M_2$  beliebige Mengen und  $X$  beliebige Teilmenge von  $M_1 \times M_2$ . Dann heißt

$X^1 := \{m_2 \in M_2 : (m_1, m_2) \in X\}$  ( $m_1 \in M_1$  beliebig) der  $m_1$ -Schnitt von  $X$  und analog

$X^2 := \{m_1 \in M_1 : (m_1, m_2) \in X\}$  ( $m_2 \in M_2$  beliebig) der  $m_2$ -Schnitt von  $X$ .

### 4. Bemerkung:

a) Seien  $X, Y \subseteq M_1 \times M_2$  und  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $M_1 \times M_2$ . Dann gilt für die  $m_i$ -Schnitte ( $i=1, 2$ )

$(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)^i = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^i$ ,  $(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n)^i = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^i$  und  $(X \setminus Y)^i = X^i \setminus Y^i$ .

b) Ist  $A \subseteq M_1$  und  $B \subseteq M_2$ , so gilt

$(A \times B)^1 = \begin{cases} B & \text{falls } m_1 \in A \\ \emptyset & m_1 \notin A \end{cases} \quad (m_1 \in M_1 \text{ beliebig}).$

Entsprechendes gilt für  $(A \times B)^2$ .

c) Ist  $X \in M_1 \times M_2$  schwachdefinit, so auch  $X^1$  und  $X^2$ .

Zunächst ist es das Ziel in diesem §, aus endlich vielen Maßen  $\mu_1, \dots, \mu_n$  auf  $\mathcal{C}$ -Algebren  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  in  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  ein Maß  $\tau$  zu konstruieren mit der Eigenschaft  $\tau(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_n)$  ( $A_i \in \mathcal{A}_i, i=1, \dots, n$ ). Da die Ergebnisse aus den §§ 2, 3 und 4 angewendet werden, muß man für den Rest dieses § voraussetzen, daß  $(\mathcal{C}_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$  ( $i=1, \dots, n$ )  $\mathcal{C}$ -endliche definite Maßräume sind.

Wir führen die Konstruktion für  $n=2$  durch. Dann ist es leicht, sie durch vollständige Induktion auf beliebig endlich viele Faktoren auszudehnen.

Suerst muß man eine geeignete  $\mathcal{C}$ -Algebra als Definitionsbereich von  $\tau$  finden. Hierzu dient die folgende

#### 5. Definition:

Seien  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  Halbringe in  $\mathcal{C}_1$  bzw.  $\mathcal{C}_2$ . Dann heißt das System  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 := \{A \times B : A \in \mathcal{X}_1, B \in \mathcal{X}_2\}$  die zu  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  gehörige Basis.

#### 6. Satz:

Seien  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  (definite und ordnungsdefinite) Halbalgebren in  $\mathcal{C}_1$  bzw.  $\mathcal{C}_2$ . Dann ist  $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$  (definite und ordnungsdefinite) Halbalgebra in  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ .

#### Beweis:

Die Bemerkung 2.c) liefert die Behauptung.

Sei nun  $\mathcal{X}_i$  ( $i=1, 2$ ) das nach Voraussetzung existierende definite und ordnungsdefinite Erzeugendensystem von  $\mathcal{A}_i$ . Wegen Satz 6 aus § 1 ist  $\mathcal{X}_i$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine definite und ordnungsdefinite Algebra.

In dieser Situation ist also sowohl  $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  als auch  $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$  ein Halbring, wobei  $\mathcal{X}$  definit und ordnungsdefinit ist und  $\mathcal{A}$  erzeugt. Da wir die Fortsetzungstheorie der §§ 2 und 3 anwenden wollen (die definite und ordnungsdefinite Halbalgebren und Algebren voraussetzt), ist für uns  $\mathcal{X}$  der geeignete Kandidat für die Erzeugung einer  $\mathcal{C}$ -Algebra, auf der das gewünschte Produktmaß definiert werden kann.

#### 7. Definition:

a)  $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}_{\mathcal{C}(\mathcal{X})}$  heiße die Produkt- $\mathcal{C}$ -Algebra von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$ .

b) Auf  $\mathcal{O}$  werde folgende Mengenfunktion definiert.

$$\pi(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \text{ mit } A_i \in \mathcal{O}_i \text{ ( } i=1, 2 \text{ )} .$$

( Hierbei sei  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$  )

### 8. Satz:

$\pi$  ist  $\sigma$ -endlicher und  $\sigma$ -additiver Inhalt auf  $\mathcal{O}$ , speziell also auch auf  $\mathcal{A}$ .

Beweis: [5] S.138 f

Nur die  $\sigma$ -Additivität ist zu zeigen.

Sei  $A \times A' \in \mathcal{O}$  mit der Darstellung  $A \times A' = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times A'_n$ , wobei  $(A_n \times A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge paarweise disjunkter Mengen in  $\mathcal{O}$  ist. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definiere man Funktionen  $f_n: \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  durch  $f_n(\omega_1) := \mu_2(A'_n) 1_{A_n}(\omega_1)$  ( $\omega_1 \in \Omega_1$ ).

Jedes  $f_n$  ist  $\mathcal{O}_1$ -meßbar und es gilt

$$\int f_n d\mu_1 = \mu_1(A_n) \cdot \mu_2(A'_n) .$$

Analog gilt für  $f$ , definiert durch  $f(\omega) := \mu_2(A') 1_A(\omega)$  ( $\omega \in \Omega$ )

$$\int f d\mu_1 = \mu_1(A) \cdot \mu_2(A') .$$

Da  $\mu_2$   $\sigma$ -additiv ist, folgt nun für jedes  $\omega_1 \in \Omega_1$  wegen

Bemerkung 4

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A'_n) 1_{A_n}(\omega_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2((A_n \times A'_n)^1) = \\ &= \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times A'_n)^1\right) = \mu_2((A \times A')^1) = \mu_2(A') 1_A(\omega_1) . \end{aligned}$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz § 4.17 liefert also

$$\begin{aligned} \pi(A \times A') &= \mu_1(A) \mu_2(A') = \int f d\mu_1 = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu_1 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \cdot \mu_2(A'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n \times A'_n) . \end{aligned}$$

### 9. Satz:

Seien  $(\Omega_i, \mathcal{O}_i, \mu_i)$  ( $i=1,2$ )  $\sigma$ -endliche definite Maßräume.

Dann existiert genau ein Maß  $\pi := \mu_1 \otimes \mu_2$  auf der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$  mit der Eigenschaft

$$\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad (A_i \in \mathcal{O}_i) .$$

Beweis:

Satz 8 aus § 2 und Satz 16 aus § 3 ergeben die Behauptung.

Nun sollen noch die zum Beweis des Satzes von Fubini nötigen Vorbereitungen getroffen werden.

### 10. Hilfssatz:

Seien  $\omega_i \in \Omega_i$  ( $i=1,2$ ).

Dann liegen alle  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$ -Schnitte einer jeden Menge

$A \in \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$  in  $\mathcal{O}_2$  bzw.  $\mathcal{O}_1$ .

Beweis:

Für jedes  $\omega_i \in \Omega_i$  ( $i=1, 2$ ) ist wegen Bemerkung 4 das System aller Teilmengen  $A$  von  $\Omega_1 \times \Omega_2$  mit  $A^1 \in \mathcal{O}_2$  bzw.  $A^2 \in \mathcal{O}_1$  eine  $\sigma$ -Algebra in  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , welche  $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$  enthält, also nach § 1.14.d) auch  $\mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$ .

11. Hilfssatz: [1] 22.2

Für jedes  $A \in \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$  sind die schwachdefiniten Funktionen  $\omega_1 \mapsto \mu_2(A^1)$  bzw.  $\omega_2 \mapsto \mu_1(A^2)$   $\mathcal{O}_1$ -meßbar auf  $\Omega_1$  bzw.  $\mathcal{O}_2$ -meßbar auf  $\Omega_2$  und es gilt  
 $\pi(A) = \int \mu_1(A^2) d\mu_2 = \int \mu_2(A^1) d\mu_1$ .

Beweis:

Wir zeigen, daß  $\omega_1 \mapsto \mu_2(A^1)$  für beliebiges  $A \in \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$   $\mathcal{O}_1$ -meßbar ist.

a) Sei zuerst  $\mu_2(\Omega_2) < +\infty$ .

Bezeichnet  $\mathcal{D}$  die Menge aller  $A \in \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$ , für die  $\omega_1 \mapsto \mu_2(A^1)$   $\mathcal{O}_1$ -meßbar ist, so gilt  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$ .

Wir zeigen, daß auch  $\mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{D}$  richtig ist.

Mit Hilfe von Bemerkung 4 zeigt man, daß  $\mathcal{D} \cap \Omega$  enthält, mit je zwei Mengen  $A_1, A_2$  mit  $A_1 \supseteq A_2$  auch deren Differenz und mit jeder definiten Folge paarweise disjunkter Mengen auch deren Vereinigung. Weiterhin gilt  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{D}$ . Da  $\mathcal{O} \cap$ -stabil ist, kann man wie in § 1.14.d) zeigen, daß  $\mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_G(\mathcal{O})$  Teilmenge von  $\mathcal{D}$  ist.

b) Ist  $\mu_2$   $\sigma$ -endlich, so existiert eine definite isotone Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{O}_2$  mit  $\Omega_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $\mu_2(A_n) < +\infty$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

Also ist nach a) für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $\omega_1 \mapsto 1_{A_n}(\omega_1) \mu_2(A^1)$  ( $A \in \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$ )  $\mathcal{O}_1$ -meßbar. Satz 4 aus § 2 und Satz 13 aus § 4 liefern somit die Behauptung.

c) Da  $\mathcal{D}$  mit jeder definiten Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen auch  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  enthält, liefert der Satz von B. Levi § 4.17, daß  $A \mapsto \int \mu_2(A^1) d\mu_1$  ein Maß auf  $\mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$  ist, das auf  $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$  mit  $\pi$  übereinstimmt, also wegen Satz 9 sogar auf ganz  $\mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$ .

Den zweiten Teil des Satzes zeigt man analog.

12. Definition:

Sei  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  schwachdefinite Funktion. Dann heißt  $f_1(\omega_2) := f(\omega_1, \omega_2)$  für ein beliebiges  $\omega_1 \in \Omega_1$  der  $\omega_1$ -Schnitt von  $f$  und  $f_2(\omega_1) := f(\omega_1, \omega_2)$  für ein beliebiges  $\omega_2 \in \Omega_2$  der  $\omega_2$ -Schnitt von  $f$ .

**13. Bemerkung:**

Ist  $f$   $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -meßbare schwachdefinite reelle Funktion auf  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , so ist  $f_1$  bzw.  $f_2$   $\mathcal{A}_2$  bzw.  $\mathcal{A}_1$ -meßbar wegen 10 und  $f_1^{-1}(A) = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in f^{-1}(A)\} = (f^{-1}(A))^1$  für beliebige Teilmengen  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Analog zeigt man dies für  $f_2$ .

**14. Satz:**

a) Sei  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$   $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -meßbar. Dann ist die Funktion  $g'$  (definiert durch  $g'(\omega_1) = \int f_1(\omega_2) d\mu_2$ ) bzw.  $g''$  (definiert durch  $g''(\omega_2) = \int f_2(\omega_1) d\mu_1$ )  $\mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{A}_2$ -meßbar und es gilt

$$(x) \quad \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int (f_2 d\mu_1) d\mu_2 = \int (f_1 d\mu_2) d\mu_1.$$

b) Ist  $f$   $\mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbare numerische schwachdefinite Funktion auf  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , so ist  $f_1$  für  $\mu_1$ -fast alle  $\omega_1 \in \Omega_1$   $\mu_2$ -integrierbar und  $f_2$  für  $\mu_2$ -fast alle  $\omega_2 \in \Omega_2$   $\mu_1$ -integrierbar und es gilt wieder (x).

**Beweis:**

Mit Hilfssatz 10 und 11 zeigt man die Behauptung wie üblich (z.B. [1] 22.6 und 22.7).

## § 12. Kompakte Klassen und $\sigma$ -Additivität

Sei  $\Omega$  definite oder indefinite Menge.

### 1. Definition:

Eine definite oder indefinite Menge  $\mathcal{K}$  von Teilmengen von  $\Omega$  heißt kompakte Klasse, falls für jede definite Folge  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{K}$  mit der endlichen Durchschnittseigenschaft (d.h.  $\bigcap_{n \leq p} C_n \neq \emptyset$  für jedes  $p \in \mathbb{N}$ ) gilt  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$ .

### 2. Beispiel:

In jedem separablen metrischen Raum ist das System der kompakten Mengen eine kompakte Klasse (vergl. Anhang 3, §2.9.c)). Der in Anhang 3 angegebene Beweis zeigt, daß man sich in Definition 1 auf definite Folgen beschränken muß.

Es ist oft schwierig, von einer Mengenfunktion, die nach Konstruktion schon additiv ist, die  $\sigma$ -Additivität nachzuweisen. Der Begriff der kompakten Klasse und die daran anschließenden Sätze können als Hilfsmittel zum Beweis der  $\sigma$ -Additivität dienen. Wir werden die hier entwickelte Theorie bei der Konstruktion von Maßen auf unendlichen Produkten von Wahrscheinlichkeitsräumen entscheidend ausnutzen.

Der folgende Satz bringt unter Ausnutzung der klassischen Logik ein Folgenauswahlverfahren, das auch sonst in der Mathematik Anwendung findet (z.B. beim Beweis des Satzes von Tychonoff).

### 3. Satz: [12] Lemma I.6.1

Sei  $\mathcal{K}$  kompakte Klasse in  $\Omega$ . Dann sind auch die Mengen  $\mathcal{K}_\cup$  der endlichen Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}_\cap$  der Durchschnitte von definiten Folgen in  $\mathcal{K}$  kompakte Klassen.

#### Beweis:

Sei  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{K}$  mit  $\bigcap_{n \leq p} K_n \neq \emptyset$  für jedes  $p \in \mathbb{N}$ , wobei für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $K_n$  die Form

$$K_n := \bigcup_{m=1}^{M_n} C_n^m \text{ habe } (M_n \in \mathbb{N}).$$

Somit existiert für jedes  $p \in \mathbb{N}$  ein  $p$ -Tupel  $(m_1, \dots, m_p)$

mit  $1 \leq m_i \leq M_i$  ( $i=1, \dots, p$ ) und  $\bigcap_{n \leq p} C_n^{m_n} \neq \emptyset$ , denn

$$\bigcap_{n \leq p} K_n = \bigcup_{\substack{(m_1, \dots, m_p) \\ 1 \leq m_i \leq M_i}} \left( \bigcap_{n \leq p} C_n^{m_n} \right).$$

Für jedes  $q \in \mathbb{N}$  werde nun das obige  $q$ -Tupel zu einer definiten Folge  $(m_n^q)_{n \in \mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen erweitert, mit der Eigenschaft  $1 < m_n^q \leq M_n$ . (Dies ist leicht möglich, wenn man für  $n \geq q$  z.B.  $m_n^q := 1$  oder  $M_n$  setzt)

Aus den Gliedern der Folgen  $(m_n^q)_{n \in \mathbb{N}}$  konstruieren wir nun eine definite Folge  $(m'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^{m'_n} \neq \emptyset$ , womit dann auch die Behauptung bewiesen ist.

Da  $\mathcal{K}$  kompakte Klasse ist, genügt es hierzu schon  $\bigcap_{n \in p} C_n^{m'_n} \neq \emptyset$  für jedes  $p \in \mathbb{N}$  zu zeigen.

Sei also  $p \in \mathbb{N}$  beliebig. Für  $1 \leq n < p$  sei dann  $m'_n$  dasjenige  $m_n^q$ , das für laufendes  $q$  unendlich oft vorkommt. Dieses  $m_n^q$  kann man auf definite Weise immer finden, denn für jedes  $n \in \mathbb{N}$  kann  $m_n^q$  nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Somit existiert ein Wert, der unendlich oft vorkommt.

Die so definierte Folge erfüllt obige Durchschnittseigenschaft.

Für beliebiges  $p \in \mathbb{N}$  sei hierzu  $q_0$  das kleinste  $q > p$  mit  $m'_n = m_n^{q_0}$ , dann gilt  $\bigcap_{n \in p} C_n^{m'_n} \supseteq \bigcap_{n \in p} C_n^{m_n^{q_0}} \neq \emptyset$ .

Es ist klar, daß mit  $\mathcal{K}$  auch  $\mathcal{K}_\delta$  kompakte Klasse ist.

#### 4. Satz: [12] I.6.2

Sei  $\mathcal{O}$  ordnungsdefinite Halbgebra oder Algebra in  $\Omega$  und  $\mathcal{K}$  kompakte Klasse, die in  $\mathcal{O}$  enthalten ist. Sei  $\mu$  ein Inhalt auf  $\mathcal{O}$  mit  $\mu(\Omega) = 1$  und  $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \in \mathcal{A}, K \in \mathcal{K} \}$  für jedes  $A \in \mathcal{O}$ .

Dann ist  $\mu$   $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{O}$ .

#### Beweis:

a) Sei zuerst  $\mathcal{O}$  Algebra.

Wir zeigen, daß  $\mu$   $\sigma$ -stetig ist, woraus nach Satz 4 in § 2 die  $\sigma$ -Additivität folgt. Sei also  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite antitone Folge in  $\mathcal{O}$  mit  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ . Sei  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  beliebig.

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  wähle man  $K_n$  in  $\mathcal{K}$  mit  $K_n \subseteq A_n$  und  $\mu(A_n) \leq \mu(K_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Dann ist  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{O}$  mit  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ . Da  $\mathcal{K}$  kompakte Klasse ist, existiert ein  $p \in \mathbb{N}$  mit  $\bigcap_{n \in p} K_n = \emptyset$ . Aus der Formel

$$\bigcap_{n \in p} A_n \subseteq \bigcup_{n \in p} A_n \cap \left( \bigcap_{n \in p} K_n \right) = \bigcup_{n \in p} A_n \cap \bigcap_{n \in p} K_n = \bigcup_{n \in p} [A_n \cap \bigcap_{n \in p} K_n] = \bigcup_{n \in p} [A_n \setminus K_n]$$

folgt mit Hilfe der Eigenschaften §2.2.c)

$$\mu\left(\bigcap_{n \in p} A_n\right) \leq \sum_{n \in p} \mu(A_n \setminus K_n) \leq \sum_{n \in p} (\mu(A_n) - \mu(K_n)) \leq \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  beliebig war, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ .

b) Sei nun  $\mathcal{O}$  Halbgebra.

Nach Satz 3 ist  $\mathcal{O}$  die Menge aller endlichen Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{K}$  kompakte Klasse, die in der von  $\mathcal{K}$  erzeugten Algebra  $\mathcal{O}(\mathcal{K})$  liegt.

Sei nun  $A \in \mathcal{O}(\mathcal{K})$  mit der Darstellung  $A = \bigcup_{i=1}^{n_0} K_i$  mit paarweise disjunkten Mengen  $K_i \in \mathcal{K}$ . Für  $i \in \mathbb{N}_0^*$  wähle man Mengen  $K_i, \nu_i$  ( $i=1, \dots, n_0$ ), sodass  $K_i \in \mathcal{K}$  und  $\nu(K_i) = \nu_i(K_i) + \frac{1}{n_0}$  gilt.

Dann folgt  $\bigcup_{i=1}^{n_0} K_i = A$  und  $\nu(A) = \nu(\bigcup_{i=1}^{n_0} K_i) + \dots$ , wobei  $\nu$  die nach Satz 7 aus §2 existierende eindeutige Fortsetzung von  $\nu$  auf  $\mathcal{O}(\mathcal{K})$  ist. Da  $\bigcup_{i=1}^{n_0} K_i$  in  $\mathcal{K}$  liegt, erfüllen  $\nu_1, \dots, \nu_{n_0}$  und  $\nu$  die Voraussetzungen von a).

Also ist  $\nu$   $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{O}(\mathcal{K})$  und somit ist auch  $\nu$  (die Restriktion von  $\nu$  auf  $\mathcal{O}$ )  $\sigma$ -additiv.

### § 13. Unendliche Produkte von Maßräumen

Sei  $I$  definite oder schwachdefinite Menge,  $\mathcal{M}$  definite oder indefinite Menge von beliebigen Mengen und  $f: I \rightarrow \mathcal{M}$  surjektive schwachdefinite Abbildung. Dann heißt  $f$  Indizierung des Mengensystems  $\mathcal{M}$ .

Für jedes  $i \in I$  sei  $M_i := f(i)$ . Dann ist  $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$  das indizierte Mengensystem mit der Indexmenge  $I$ .

#### 1. Definition:

Sei  $I$  Indexmenge und  $(\Omega_i)_{i \in I}$  indiziertes Mengensystem.

a)  $\Omega := \Omega_I := \prod_{i \in I} \Omega_i$  sei die Menge aller schwachdefiniten Abbildungen  $\omega$  von  $I$  in  $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$  mit  $\omega(i) \in \Omega_i$  für jedes  $i \in I$ .  $\Omega_I$  heißt das Produkt der  $(\Omega_i)_{i \in I}$ .

Ist ein  $\Omega_i = \emptyset$ , so sei  $\Omega_I = \emptyset$ .

b) Seien  $J, K$  definite oder schwachdefinite Teilmengen von  $I$  mit  $J \subseteq K$ . Ordnet man jeder Abbildung  $\omega_K \in \Omega_K$  ihre Restriktion auf die Teilmenge  $J \subseteq K$  zu, so ergibt sich die Projektionsabbildung  $p_J^K : \Omega_K \rightarrow \Omega_J$  von  $\Omega_K$  auf  $\Omega_J$ .

Für  $K = I$  sei kurz  $p_J := p_J^I$ .

c) Ist auf jedem  $\Omega_i$  ( $i \in I$ ) noch ein Halbring  $\mathcal{X}_i$  gegeben, so heiße für jede definite endliche Teilmenge  $J \subseteq I$

$Z := p_J^{-1}(\prod_{j \in J} A_j)$  mit  $A_j \in \mathcal{X}_j$  ( $j \in J$ ) Zylindermenge mit der endlichen Produktbasis  $\prod_{j \in J} A_j \in \prod_{j \in J} \mathcal{X}_j$ .

$\mathcal{Z}_\mathcal{X}$  sei die im allgemeinen indefinite Menge aller Zylindermengen mit definiten endlichen Produktbasen in den  $\mathcal{X}_i$ .

#### 2. Satz:

Seien  $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$  Halbringe bzw. Halb-algebren auf den Mengen  $(\Omega_i)_{i \in I}$ . Dann ist  $\mathcal{Z}_\mathcal{X}$  ein Halbring bzw. eine Halb-algebra auf  $\prod_{i \in I} \Omega_i$ .

#### Beweis:

Seien  $J, K$  definite endliche Teilmengen von  $I$  und

$Z_1 := p_J^{-1}(\prod_{j \in J} A_j)$  ( $A_j \in \mathcal{X}_j$ ,  $j \in J$ ) und

$Z_2 := p_K^{-1}(\prod_{k \in K} B_k)$  ( $B_k \in \mathcal{X}_k$ ,  $k \in K$ ) zwei Zylinder.

Dann setze man  $L := J \cup K$  und  $A_j := \Omega_j$  für  $j \in L \setminus J$  und

$B_k := \Omega_k$  für  $k \in L \setminus K$ .  $L$  ist definite endliche Menge und es gilt

$Z_1 = p_L^{-1}(\prod_{l \in L} A_l)$  und  $Z_2 = p_L^{-1}(\prod_{l \in L} B_l)$ . Nach Satz 6 aus § 11 ist

$\prod_{l \in L} H_l$  ( $H_l \in \mathcal{X}_l$ ,  $l \in L$ ) ein Halbring, woraus die Behauptung folgt.

### 3. Voraussetzung:

Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)_{i \in I}$  definite Maßräume mit  $\mu_i(\Omega_i) = 1$  für jedes  $i \in I$  und  $\mathcal{X}_i$  zu  $\mathcal{A}_i$  gehörige definite Erzeugendensysteme, die wegen Satz §1.6 ohne Beschränkung der Allgemeinheit Halbalgebren sind.

$\mathcal{Z}$  sei die Menge aller Zylinder mit definiten endlichen Produktbasen in den  $\mathcal{A}_i$  und  $\mathcal{X}$  die Menge aller Zylinder mit definiten endlichen Produktbasen in den  $\mathcal{X}_i$ .

Diese Voraussetzung sichert, daß für je endlich viele Maßräume die Produkt- $\sigma$ -Algebra und das Produktmaß eindeutig bestimmt sind (vergl. § 12).

### 4. Definition:

Sei  $\mathcal{X}(I)$  die Menge aller definiten endlichen Teilmengen von  $I$ . Auf  $\mathcal{Z}$  werde eine Mengenfunktion  $P_0$  definiert durch  $P_0(P_J^{-1}(\prod_{j \in J} A_j)) := \prod_{j \in J} \mu_j(A_j)$  ( $J \in \mathcal{X}(I), A_j \in \mathcal{A}_j$  ( $j \in J$ )).

### 5. Bemerkung:

a) Sind  $X, Y$  beliebige Mengen,  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung,  $A$  beliebige Teilmenge von  $X$  und  $j_A: A \rightarrow X$  die kanonische Inklusion.

so wird die Restriktion von  $f$  auf  $A$  definiert durch  $\text{Rest}_A f := f \circ j_A$ .

b) Ist  $A$  in der Situation von a) sogar (schwach-)definit, so ist  $j_A$  (schwach-)definit. Somit ist für schwachdefinites  $f$  die Restriktion  $\text{Rest}_A f$  (schwach-)definit.

Angewandt auf Definition 1.b) ergibt dies, daß alle dort auftretenden Projektionen schwachdefinit sind.

c) In Definition 1.c) ist wegen b) für jede definite endliche Teilmenge  $J \subseteq I$   $p_J$  definit (vergl. Anhang 1).

d) Würde man auch beliebige indefinite Indext Mengen  $I$  und indefinite Indizierungen zulassen und wählt man dann eine indefinite endliche Teilmenge  $J$  von  $I$ , so ist  $\prod_{j \in J} \mu_j(A_j)$  aus Definition 4 ein indefinit gegebenes Produkt, was beim Nachweis der  $\sigma$ -Additivität von  $P_0$  aber nicht sein darf, denn hier dürfen nur definite Folgen von Produkten auftreten. Selbst wenn  $J$  definite endliche Teilmenge von  $I$  ist, so ist (für indefinites  $I$  und indefinite Indizierung)  $\prod_{j \in J} \mu_j(A_j)$  immer noch nicht definit gegebenes Produkt, da die Indizierung nur indefinit gegebene  $A_j$  liefert.

Außerdem müßte man bei indefiniter Indexmenge  $I$  und indefiniter Indizierung bei der Definition von  $\mathcal{I}_I$  auch indefinite Abbildungen  $\omega: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i$  zulassen. Dann wäre aber selbst für definites  $J \in I$   $p_J$  nicht mehr (schwach-)definit und somit jede Zylindermenge indefinit gegeben. Da wir aber die Fortsetzungstheorie aus § 3 auf  $\mathcal{I}_I$  anwenden wollen, muß  $\mathcal{I}_I$  definit sein.

Läßt man bei schwachdefinitem oder definitem  $I$  indefinite Abbildungen  $\omega: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i$  zu, so kann es sein, daß für  $i \in I$  die Projektion  $p_{\{i\}}: \Omega_I \rightarrow \Omega_i$  die Darstellung der Menge  $\Omega_i$  verändert. Denn sei  $I := \{1, 2\}$  und  $\Omega_1, \Omega_2$  schwachdefinite Mengen und  $\omega$  indefinite Abbildung von  $I$  in  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  mit  $\omega(i) \in \Omega_i$ . Dann kann  $p_{\{i\}} := \text{Rest}_{\{i\}} \omega$  indefinit sein, also wäre auch  $\Omega_i = p_{\{i\}}^{-1}(\omega(\{i\}))$  indefinit dargestellt, was gegenüber unserer Voraussetzung einen Informationsverlust darstellt.

e) Ist  $I$  definite Indexmenge, so ist  $\mathcal{I}_I$  definiter Halbring, da  $\mathcal{X}(I)$  definit ist.

f) In Definition 1.a) ist, da das Auswahlaxiom nicht verwendet wird, nicht unbedingt gesichert, daß  $\Omega_I \neq \emptyset$ , falls  $\Omega_i \neq \emptyset$  für jedes  $i \in I$ . Sind alle  $\Omega_i$  aber schwachdefinit und nichtleer, so ist  $\Omega_I \neq \emptyset$ , denn da  $I$  schwachdefinit ist, kann der Auswahlatz aus Anhang 1 angewendet werden.

#### 6. Satz: [1] 33.2

$P_O$  ist ein Inhalt auf der Halbalgebra  $\mathcal{Z}$ .

#### Beweis:

a)  $P_O$  ist wohldefinierte schwachdefinite Mengenfunktion auf  $\mathcal{Z}$ .

Seien  $Z = p_J^{-1}(\prod_{j \in J} A_j) = p_K^{-1}(\prod_{k \in K} B_k)$  zwei Darstellungen eines Zylinders  $Z \in \mathcal{Z}$ , wobei  $J, K \in \mathcal{X}(I)$ ,  $A_j \in \mathcal{O}_j$  ( $j \in J$ ),  $B_k \in \mathcal{O}_k$  ( $k \in K$ ).

1) Ist  $J \subset K$ , so ist  $p_J^{-1}(\prod_{j \in J} A_j) = p_K^{-1}((p_J^K)^{-1}(\prod_{j \in J} A_j))$ .

Setzt man dann  $B' := (p_J^K)^{-1}(\prod_{j \in J} A_j)$ , so gilt  $p_K^{-1}(\prod_{k \in K} B_k) = p_K^{-1}(B')$ , also auch  $\prod_{k \in K} B_k = B'$ , da  $p_K$  surjektiv ist.

$B'$  hat aber die Darstellung  $B' = \prod_{k \in K} B'_k$  mit  $B'_k = A_k$  ( $k \in J$ ) und  $B'_k = \Omega_k$  ( $k \in K \setminus J$ ).

Da  $\mu_i(\Omega_i)=1$  für jedes  $i \in I$ , ist

$\prod_{j \in J} \mu_j(A_j) = \prod_{k \in K} \mu_k(B_k) = \prod_{k \in K} \mu_k(B_k)$ , also ist  $P_0$  wohldefiniert.  
2) Sind  $J$  und  $K$  beliebig, so setze man  $L := J \cup K$ .

Dann ist jeder Zylinder  $Z$  mit endlicher Produktbasis  $\prod_{j \in J} A_j$  bzw.  $\prod_{k \in K} B_k$  ein Zylinder mit endlicher Produktbasis in  $\prod_{\ell \in L} \Omega_\ell$  (vergl. den Beweis von Satz 2). Also existiert eine Menge  $\prod_{\ell \in L} C_\ell$  in  $\prod_{\ell \in L} \Omega_\ell$ , sodaß

$Z = p_L^{-1}(\prod_{\ell \in L} C_\ell) = p_J^{-1}(\prod_{j \in J} A_j) = p_K^{-1}(\prod_{k \in K} B_k)$ . Nach 1) gilt somit

$P_0(p_J^{-1}(\prod_{j \in J} A_j)) = P_0(p_L^{-1}(\prod_{\ell \in L} C_\ell))$  und

$P_0(p_K^{-1}(\prod_{k \in K} B_k)) = P_0(p_L^{-1}(\prod_{\ell \in L} C_\ell))$ , woraus die Behauptung folgt,

d.h.  $P_0$  ist auch in dieser Situation wohldefiniert.

b)  $P_0$  ist ein Inhalt, denn seien  $Y, Z \in \mathcal{Z}$  disjunkte Zylinder.

Wie in Teil a) zeigt man, daß dann eine definite endliche

Menge  $J \subseteq I$  existiert mit  $Y = p_J^{-1}(\prod_{j \in J} A_j)$  und  $Z = p_J^{-1}(\prod_{j \in J} B_j)$ .

Somit ist  $P_0(Y \cup Z) = \prod_{j \in J} \mu_j(\prod_{j \in J} A_j \cup \prod_{j \in J} B_j) =$

$= \prod_{j \in J} \mu_j(\prod_{j \in J} A_j) + \prod_{j \in J} \mu_j(\prod_{j \in J} B_j) = P_0(Y) + P_0(Z)$ .

### 7. Satz: [12] III.3

Ist  $I$  definite Indexmenge, so kann der Inhalt  $P_0$  auf  $\mathcal{Z}$  auf genau eine Weise zu einem Maß  $P := \bigotimes_{i \in I} \mu_i$  auf der von  $\mathcal{X}$  erzeugten

$\sigma$ -Algebra  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \mathcal{O}_i := \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}_i) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})$  fortgesetzt werden mit

$p_J(P) = \prod_{j \in J} \mu_j$  für jedes  $J \in \mathcal{A}(I)$  und  $P(\Omega_I) = 1$ , falls für

jedes  $i \in I$  eine kompakte Klasse  $\mathcal{K}_i$  in  $\mathcal{O}_i$  existiert mit

$\mu_i(A) = \sup \{ \mu_i(K) : K \in \mathcal{K}_i, K \subseteq A \}$  für jedes  $A \in \mathcal{O}_i$ .

### Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $I = \mathbb{N}$ .

Wir zeigen:  $P_0$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{Z}$ , dann ist  $P_0$  auch auf der definiten Halb-algebra  $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}}$   $\sigma$ -additiv und die Fortsetzungstheorie aus den §§ 2 und 3 kann angewendet werden.

Wegen Satz §12.4 genügt es zu zeigen: Es existiert eine kompakte Klasse  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{Z}$  mit

$P_0(Z) = \sup \{ P_0(K) : K \in \mathcal{Z}, K \in \mathcal{K} \}$  für jedes  $Z \in \mathcal{Z}$ .

Sei  $\mathcal{Z}'$  die Menge aller Zylinder der Form  $p_{i_1}^{-1}(K_{i_1})$  ( $i_1 \in I, K_{i_1} \in \mathcal{K}_{i_1}$ ). Dann ist  $\mathcal{Z}'$  kompakte Klasse, denn sei

$(p_{i_n}^{-1}(K_{i_n}))_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge in  $\mathcal{Z}'$  und sei  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p_{i_n}^{-1}(K_{i_n}) = \emptyset$ .

Es ist die Existenz eines  $p_{i_n} \in \mathbb{N}$  mit  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p_{i_n}^{-1}(K_{i_n}) = \emptyset$  zu zeigen.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p_{i_n}^{-1}(K_{i_n})$  hat aber die Form  $\bigcap_{i \in I} B_i$  mit  $B_i := \bigcap_{i_n = i} K_{i_n}$ .

Nun folgt aber aus  $\prod_{i \in I} B_i = \emptyset$  die Existenz eines  $i_0 \in I$  mit  $B_{i_0} = \emptyset$  (vergl. Bemerkung 5.f). Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{K}_{i_0}$  kompakte Klasse und  $B_{i_0}$  Durchschnitt von Elementen aus  $\mathcal{K}_{i_0}$ , also existiert  $p \in \mathbb{N}$  mit  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{i_n} = \emptyset$ . Dann ist aber auch  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^{-1}_{\{i_n\}}(K_{i_n}) = \emptyset$ .  
 Nun sei  $\mathcal{K} := \mathcal{Z}'$  die Menge aller Durchschnitte definiter Folgen in  $\mathcal{Z}'$ .  $\mathcal{K}$  ist wegen § 12.3 ebenfalls kompakte Klasse. Jetzt ist noch zu zeigen:

$P_0(Z) = \sup \{ P_0(K) : K \in \mathcal{K}, K \subseteq Z \}$  für jedes  $Z \in \mathcal{Z}$ .

Sei hierzu  $Z := p^{-1}_J(\prod_{j \in J} A_j)$  mit  $J \in \mathcal{X}(I)$ ,  $A_j \in \mathcal{O}_j (j \in J)$  ein Zylinder in  $\mathcal{Z}$  und  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  beliebig und sei  $n$  die Anzahl der Elemente in  $J$ .

Nach Voraussetzung kann man für jedes  $j \in J$  ein  $K_j \in \mathcal{K}_j$  mit  $K_j \subseteq A_j$  und  $\mu_j(A_j) \leq \mu_j(K_j) + \frac{\varepsilon}{n}$  wählen.

Sei  $K := \bigcap_{j \in J} p^{-1}_{\{j\}}(K_j)$  gesetzt. Dann ist  $K \in \mathcal{K}$  und  $K \subseteq Z$  und es

gilt  $Z \setminus K \subseteq \bigcup_{j \in J} p^{-1}_{\{j\}}(A_j \setminus K_j)$ , was man sich z.B. mit Formel 2.c)3) aus § 11 klarmacht.

Da  $P_0$  als Inhalt monoton und subadditiv ist, folgt somit (da jedes  $\mu_j$  subtraktiv ist)

$$\begin{aligned} P_0(Z) - P_0(K) &\leq P_0\left(\bigcup_{j \in J} p^{-1}_{\{j\}}(A_j \setminus K_j)\right) \leq \sum_{j \in J} P_0(p^{-1}_{\{j\}}(A_j \setminus K_j)) = \\ &= \sum_{j \in J} \mu_j(A_j \setminus K_j) = \sum_{j \in J} (\mu_j(A_j) - \mu_j(K_j)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

### 8. Bemerkung:

Wegen Satz § 1.6 sei nun  $\mathcal{Z}$  sogar Algebra.

Da jeder Zylinder in  $\mathcal{Z}$  eine definite endliche Produktbasis besitzt, folgt aus Definition § 1.12, daß jedes  $Z \in \mathcal{O}_\infty(\mathcal{Z})$  nur von (definit-) abzählbar vielen Komponenten abhängt, sodaß die Beschränkung auf  $I := \mathbb{N}$  in Satz 7 völlig natürlich ist.

## Zweiter Teil: Wahrscheinlichkeitstheorie

§ 14. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wir beginnen mit einer Einführung in die ( konstruktive ) Wahrscheinlichkeitstheorie (kurz: W-Theorie) um klar zu machen, auf welche Sätze es im folgenden besonders ankommt und welche Sätze aus Teil I grundlegend für den Aufbau der W-Theorie sind.

Ganz allgemein ist es das Ziel der konstruktiven Mathematik, "Modelle", sei es durch Kalküle oder durch Herstellungsnormen anzugeben und dann Sätze über diese Modelle zu beweisen ohne Verwendung der axiomatischen Mengenlehre. Selbst wenn, wie hier im Falle der Maßtheorie, die Modelle nicht explizit auftreten, sondern wenn "axiomatisch", d.h. mit Konstruktionsvorschriften gearbeitet wird, bei denen offen gelassen wird, was man konstruiert (nur das "wie" ist festgelegt), so lassen sich alle gewonnenen Aussagen sofort als Sätze über die nach den Regeln zu konstruierenden Modelle auffassen.

Sätze der axiomatischen Mathematik, die sich nicht auf Modelle im obigen Sinne beziehen lassen, spielen für die konstruktive Mathematik keine Rolle. Dies macht sich in der W-Theorie viel stärker bemerkbar als z.B. in der Analysis oder gar Arithmetik.

Im Anschluß an [9] S.209 ff machen wir folgende

1. Definition:

a) Ein Gerät heißt ein Zufallsgenerator, wenn es folgenden Forderungen genügt:

1) Eindeutigkeit : Jede Benutzung des Gerätes ergibt als Resultat genau eine von endlich vielen Aussageformen  $E_1, \dots, E_N$ .  
 2) Ununterscheidbarkeit: Mit keinem Kausalwissen läßt sich ein Grund angeben, der eines der Resultate  $E_1, \dots, E_N$  vor einem anderen auszeichnet.

3) Wiederholbarkeit: Nach jeder Benutzung ist das Gerät wieder im selben Zustand wie vor der Benutzung.

b) Ein Element  $x$  wird aus einer endlichen Menge zufällig entnommen, wenn die Entnahme mit Hilfe eines Zufallsgenerators geschieht.

2. Bemerkung:

a) Selbstverständlich erfüllen die in unserer Kultur vorhan-

denen "Zufallsgeneratoren" (z.B. Würfel, Roulette, Glücksräder) nicht vollkommen die drei Forderungen aus Definition 1.a), was aber an der sinnvollen Aufstellung der drei Normen nichts ändert.

b) In Definition 1.b) deutet sich schon der große Unterschied zwischen axiomatischer und konstruktiver W-Theorie an, denn in der konstruktiven W-Theorie wird eine Definition von "zufällig" und mit deren Hilfe dann auch von "Wahrscheinlichkeit" gegeben, was man in der axiomatischen Mathematik vermeidet, um logischen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen.

### 3. Definition:

Wird aus einer N-elementigen Menge M ein Element x zufällig entnommen und ist A eine Aussageform für die Elemente von M und  $\varphi(A)$  die relative Häufigkeit von A, so wird die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  der Voraussage  $A(x)$  definiert durch  $P(A) := \varphi(A)$ .

### 4. Bemerkung:

Wird x nicht zufällig entnommen, so bleibt 3. immer noch eine Definition, es ist also zu erklären, warum bei zufälliger Wahl von x ein sinnvoller Wahrscheinlichkeitsbegriff entsteht. Hierzu erinnere man sich an die beiden folgenden Sätze über relative Häufigkeiten:

a)  $\varphi(A)=1$ , wenn alle Elemente von M A erfüllen.

b)  $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) + \varphi(B)$  für disjunkte Aussageformen A, B.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man unter Beachtung der Definition des Zufallsgenerators 1.a)2) folgende Sätze aufstellen:

c)  $P(A)=1$ , wenn A notwendig ist.

d)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , wenn A und B unvereinbar sind.

e)  $P(E_1) = \dots = P(E_N)$ , wobei  $E_1, \dots, E_N$  die N "Elementarereignisse" des Zufallsgenerators sind.

Nun ist es leicht,  $P(A) = \varphi(A)$  zu beweisen ([9] S.211 f).

Es ist allerdings noch nachzutragen, warum im Zusammenhang mit den Resultaten eines Zufallsgenerators von relativen Häufigkeiten gesprochen wird. Hierzu betrachte man die bisher noch nicht verwendete Wiederholbarkeit in der Definition des Zufallsgenerators:

Zunächst werden mit dem Zufallsgenerator I Versuche durchgeführt. Dann wird für jede Aussage A, die mit Hilfe von

Adjunktionen aus den  $E_1, \dots, E_N$  zusammengesetzt ist, mit Hilfe von 4.c) bis e) die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  berechnet und außerdem die relative Häufigkeit  $\rho_L(A)$  von  $A$  in der Versuchsreihe der Länge  $L$ . Für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  läßt sich wegen der Wiederholbarkeit die Wahrscheinlichkeit  $P_L(|\rho_L(A) - P(A)| < \varepsilon)$  berechnen als die Häufigkeit von Versuchsreihen der Länge  $L$ , die die Aussage  $|\rho_L(A) - P(A)| < \varepsilon$  erfüllen. Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen konvergiert nun die Folge  $(P_L(|\rho_L(A) - P(A)| < \varepsilon))_{L \in \mathbb{N}}$   $P$ -stochastisch gegen 1. Erst durch diesen Satz wird also unsere obige Definition 3. gerechtfertigt. Dies ist auch der Grund, weshalb in § 16 ausführlich Bedingungen für die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen behandelt werden, wobei allerdings gleich das starke Gesetz der großen Zahlen betrachtet wird, woraus dann das schwache Gesetz der großen Zahlen aus den maßtheoretischen Vorüberlegungen in § 6 folgt.

Nun betrachte man die Eigenschaften c) bis e) in Bemerkung 4. einmal vom maßtheoretischen Standpunkt aus. Zuerst gehe man von jeder Aussageform  $E_1, \dots, E_N$ ,  $A$ ,  $B$  zu der durch sie dargestellten Menge über. Für ein notwendiges  $A$  setze man  $\Omega := \{x \in M : A(x)\}$ . Da wegen 4.c) allen einpunktigen Teilmengen von  $\Omega$  eine Zahl zugeordnet wird und unter den Aussageformen  $A$  jede aus den  $E_1, \dots, E_N$  adjunktiv zusammengesetzte vorkommen darf, ist  $P$  für alle Teilmengen von  $\Omega$  definiert. Also ist  $P$  eine Funktion auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ , die wegen 4.d) endlich additiv ist und wegen 4.c)  $P(\Omega) = 1$  erfüllt.

Einen Zugang zur  $\mathbb{C}$ -Additivität erhält man wie folgt: Man betrachte ein Glücksrad mit Länge 1. Stellt man sich das mathematische Problem, für jedes  $N \in \mathbb{N}$  das Intervall  $[0, 1]$  in  $N$  gleichlange Stücke zu zerteilen – hier werden die Längenteile  $E_1, \dots, E_N$  gleich mit den "Elementarereignissen" identifiziert – und dann zu 4.c) bis 4.e) analoge Sätze aufzustellen, so können bei Beachtung von

e')  $P(E_1) = P(E_N)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$

in 4.d) Aussagen  $A$ ,  $B$  auftreten, die adjunktiv aus unendlich vielen  $E_n$  zusammengesetzt sind, wobei die  $E_n$  dann paarweise disjunkt sein müssen. Dies bedeutet also

d')  $P(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$  für paarweise disjunkte  $A_n$ .

$P$  ist hierbei auf der  $\mathcal{C}$ -Algebra der Borelschen Mengen im Intervall  $[0,1]$  definiert, was sofort aus d') und e') folgt, wenn man beachtet, daß die Aussageformen beliebig aus den  $E_n$  adjunktiv zusammengesetzt sein dürfen.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die diskreten Zufallsgeneratoren, das sind Zufallsgeneratoren mit festen endlich vielen Ausgängen (z.B. Würfel, Roulette) zu endlichen Grundmengen  $\Omega$ , der Algebra  $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\Omega)$  und einem Inhalt  $P$  auf  $\mathcal{C}$  führen. Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  heiße in diesem Fall ein Laplace-W-Raum. Die kontinuierlichen Zufallsgeneratoren dagegen, das sind Zufallsgeneratoren mit beliebig endlich vielen Ausgängen (z.B. Glücksräder) führen zur Borelschen  $\mathcal{C}$ -Algebra  $\mathcal{B}^n$  in einem endlich dimensionalen reellen Zahlenraum  $\mathbb{R}^n$  und zum Lebesgue-Maß  $\lambda^n$  auf  $\mathcal{B}^n$ . Das Tripel  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \lambda^n)$  heiße dann ein Lebesgue-W-Raum.

Es ist aber durchaus nicht so, daß in der konstruktiven W-Theorie nur Laplace- oder Lebesgue-W-Räume auftreten. Zur weiteren Diskussion benötigen wir folgende

### 5. Definition:

- Endlich viele Zufallsgeneratoren heißen unabhängig, wenn nach keinem Kausalwissen ein Versuch mit einem Zufallsgenerator eine Veränderung der anderen Zufallsgeneratoren bewirkt.
- Die Produktbildung endlich vieler unabhängiger Zufallsgeneratoren heiße ein Zufallsaggregat.

Nur vom mathematischen Standpunkt aus lassen sich auch Produkte unendlichvieler Zufallsgeneratoren betrachten. Sucht man in diesem Fall nach einem zugehörigen W-Raum, so kommt man mit Laplace- oder Lebesgue-W-Räumen nicht aus. Da sich sowohl Laplace- als auch Lebesgue-W-Räume als Maßräume  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  deuten lassen, wobei  $\Omega$  separabler metrischer Raum,  $\mathcal{C}$  die  $\mathcal{C}$ -Algebra der Borelschen Mengen in  $\Omega$  und  $P$  ein Maß auf  $\mathcal{C}$  mit  $P(\Omega) = 1$  ist, könnte man versucht sein, einen W-Raum zu definieren als Tripel  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ , wobei  $\Omega$  separabler metrischer Raum,  $\mathcal{C}$  die  $\mathcal{C}$ -Algebra der Borelschen Mengen und  $P$  ein Borel-Maß mit  $P(\Omega) = 1$  ist. Betrachtet man dann eine definite Folge  $(\Omega_n, \mathcal{C}_n, P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von so definierten W-Räumen und möchte zeigen, daß dann das Produkt wieder ein W-Raum in diesem Sinne ist, so läßt sich zwar zeigen, daß das Produkt separabler metrischer Räume wieder ein separabler metrischer Raum ist (vergl. Anhang 3, §2.10)

und auch die unendliche Produkt- $\sigma$ -Algebra läßt sich definieren (vergl. § 13). Aber die Existenz eines Maßes  $P$  auf  $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ , das gewisse Verträglichkeitsbedingungen mit den  $P_n$  erfüllt, läßt sich nur unter schärferen Forderungen zeigen (vergl. § 13.7) und zwar muß jeder Raum  $\Omega_n$  noch vollständig sein. Als  $W$ -Raum könnte man somit jeden polnischen Raum  $\Omega$  mit zugehöriger  $\sigma$ -Algebra Borelscher Mengen und ein beliebiges Borel-Maß  $P$  mit  $P(\Omega)=1$  nehmen. In diesem Fall läßt sich zeigen, daß auch die Verläufe stochastischer Prozesse wieder Ereignisse eines so definierten  $W$ -Raumes sind (vergl. § 13.7). (Wir gehen auf die Theorie der stochastischen Prozesse nicht weiter ein, denn hat man einmal den Existenzsatz § 13.7, so verläuft der mathematische Formalismus in seinen Grundzügen wie aus der axiomatischen Mathematik gewohnt).

Daß die Klasse der polnischen  $W$ -Räume nicht zu groß ist, folgt aus Satz § 10.5, der besagt, daß jedes normierte Maß auf der  $\sigma$ -Algebra der Borelschen Mengen eines polnischen Raumes schwacher Limes einer definiten Folge diskreter Maße ist.

Beachtet man noch, daß durch Vergrößerung, das ist die Zusammenfassung von Elementarereignissen zu neuen Elementarereignissen,  $\sigma$ -Unteralgebren mit definitem Erzeugendensystem auftreten können, so kann man endgültig definieren, was ein (konstruktiver)  $W$ -Raum ist.

#### 6. Definition:

Sei  $\Omega$  polnischer Raum,  $\mathcal{O}$   $\sigma$ -Unteralgebra von  $\mathcal{O}_c(\mathbb{R}_d)$  mit definitem Erzeugendensystem und  $P$  ein Borel-Maß auf  $\mathcal{O}$  mit  $P(\Omega)=1$ . Dann heißt das Tripel  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$  ein (konstruktiver)  $W$ -Raum.

Man sieht also, daß jeder konstruktive  $W$ -Raum die Kolmogoroff-Axiome erfüllt, darüber hinaus aber noch Axiome topologischer Natur, die sich aus der Einführung mittels Zufallsgeneratoren ergeben. Es ist somit vom mathematischen Standpunkt aus klar, daß sich der Formalismus der konstruktiven  $W$ -Theorie gegenüber dem der axiomatischen Mathematik nur insoweit ändert, als sich die konstruktive Maßtheorie gegenüber der axiomatischen ändert, denn die zusätzliche Forderung topologischer Axiome hat auf den axiomatischen Formalismus keinen Einfluß.

Zu klären ist im wesentlichen nur noch, wie der Begriff der Unabhängigkeit in Definition 5., der den Hauptunterschied zwischen Maß- und W-Theorie bewirkt, in die mathematische Entwicklung eingeht. Dies wird im nächsten Paragraphen behandelt, während zum Schluß dieses Paragraphen noch einige Begriffe und Sätze aus der axiomatischen Mathematik übertragen werden.

### 7. Definition:

a) Ein definitiver Meßraum  $(\Omega, \mathcal{O})$  heißt W-Meßraum, wenn  $\Omega$  polnischer Raum und  $\mathcal{O} \subset$ -Unteralgebra der Borelschen  $\mathcal{C}$ -Algebra von  $\Omega$  ist.

b) Sei  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$  W-Raum und  $(\Omega', \mathcal{O}')$  W-Meßraum. Dann heißt jede  $\mathcal{O}$ - $\mathcal{O}'$ -meßbare schwachdefinite Abbildung  $X: \Omega \rightarrow \Omega'$  eine  $(\Omega', \mathcal{O}')$ -Zufallsvariable.

Ist speziell  $\Omega' = \mathbb{R}$  bzw.  $\overline{\mathbb{R}}$  und  $\mathcal{O}' = (\mathcal{B}^1 \text{ bzw. } \overline{\mathcal{B}}^1)$ , so heißt  $X$  reelle bzw. numerische Zufallsvariable.

c) Sei  $X$  eine  $(\Omega', \mathcal{O}')$ -Zufallsvariable auf einem W-Raum  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$ . Dann heißt das Bildmaß  $P_X := X(P)$  die Verteilung von  $X$ .

d) Sei  $X$  reelle Zufallsvariable auf einem W-Raum  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$ . Ist dann entweder  $X \geq 0$  oder  $X$   $P$ -integrierbar, so heißt  $E(X) := \int X dP$  der Erwartungswert von  $X$ .

Wegen § 5.9 und § 5.10 ist  $E(X) = \int x P_X(dx)$ .

e) Für jede integrierbare reelle Zufallsvariable  $X$  auf einem W-Raum  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$  werde die Varianz definiert durch  $V(X) := E((X - E(X))^2)$ .

### 8. Satz: [1] 27.5

Eine reelle Zufallsvariable  $X$  auf einem W-Raum  $(\Omega; \mathcal{O}, P)$  ist genau dann 2-fach integrierbar, wenn  $X$  integrierbar und  $V(X) < +\infty$  ist. In diesem Falle gilt:

$$V(X) = \int x^2 P_X(dx) - \left( \int x P_X(dx) \right)^2.$$

### Beweis:

Wegen  $P(\Omega) = 1$  ist jede konstante reelle schwachdefinite Funktion auf  $\Omega$   $q$ -fach integrierbar ( $1 \leq q < +\infty$ ). Für  $q$  definiert durch  $q^{-1} + 2^{-1} = 1$  folgt somit aus der Hölderschen Ungleichung § 4.22, angewandt auf die Konstante 1 und  $X$ , die Integrierbarkeit von  $X$  und somit auch  $V(X) < +\infty$ .

Die Umkehrung ist klar. Die Formel aus der Behauptung ergibt sich aus der Definition unter Beachtung der Linearität von  $E$ .

9. Bemerkung:

Ersetzt man eine integrierbare reelle Zufallsvariable  $X$  durch  $X - E(X)$ , so gilt  $E(X - E(X)) = 0$  (d.h.  $X - E(X)$  ist zentriert), während sich bei diesem Übergang die Varianz nicht ändert.

10. Definition:

a) Sei  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$  ein  $W$ -Raum und  $B \in \mathcal{U}$  mit  $P(B) > 0$ .

Dann heißt  $P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  ( $A \in \mathcal{U}$ ) die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter der Hypothese  $B$ .

$P_B$  ist ein Maß auf  $\mathcal{U}$  mit  $P_B(B) = 1$ .

b) Sei  $X$  integrierbare reelle Zufallsvariable auf einem

$W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$  und  $B \in \mathcal{U}$  mit  $P(B) > 0$ . Dann heißt

$E_B(X) := \int X dP_B$  die bedingte Erwartung von  $X$  unter der Hypothese  $B$ .

Der folgende Satz, dessen Beweis unter Ausnutzung des Satzes von Radon-Nikodym § 9.8 wie üblich geführt werden kann (vergl. [1] 54.1), gestattet eine Verallgemeinerung des Begriffs der bedingten Erwartung, die in der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie eine große Rolle spielt.

11. Satz:

Sei  $X$  eine numerische Zufallsvariable auf einem  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ , welche  $\geq 0$  bzw. integrierbar ist. Dann existiert zu jeder

$\sigma$ -Unteralgebra  $\mathcal{V}$  von  $\mathcal{U}$  mit definitem Erzeugendensystem fast sicher genau eine nicht negative bzw. integrierbare numerische Zufallsvariable  $X'$  auf  $\Omega$ , welche  $\mathcal{V}$ -messbar ist und der

Bedingung  $\int_U X' dP = \int_U X dP$  für alle  $U \in \mathcal{V}$  genügt.

Wenn  $X$  integrierbar und  $\geq 0$  ist, so ist fast sicher  $X' \geq 0$ .

## § 15. Unabhängige Ereignisse und Zufallsvariable

Es wird gezeigt, wie die in Definition § 14.5 eingeführte Unabhängigkeit von Zufallsgeneratoren in den mathematischen Formalismus eingeht und es werden einige Sätze bewiesen, die dann bei der Betrachtung des starken Gesetzes der großen Zahlen eine Rolle spielen.

Gegeben seien  $n$  unabhängige Zufallsgeneratoren  $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Sei  $(\Omega_i, \mathcal{O}_i, P_i)$  der zu  $G_i$  gehörige W-Raum. Sei  $G$  das durch Produktbildung aus den  $G_i$  zusammengesetzte Zufallsaggregat. Der zu  $G$  gehörige W-Raum sei  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$ . Aus den Ergebnissen in § 11 folgt:  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ ,  $\mathcal{O} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{O}_i$  und  $P = \bigotimes_{i=1}^n P_i$ . Nun sei  $A_i \in \mathcal{O}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit  $P_i(A_i)$ . Man interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$  im Zufallsaggregat  $G$  auftritt. Um dies mathematisch genau durchzuführen, setze man  $A'_1 := A_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$ , ...,  $A'_n := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{n-1} \times A_n$  (hier geht die Unabhängigkeit ein!).

Dann ist  $A'_1 \cap \dots \cap A'_n$  eine mathematische Beschreibung des Ereignisses " $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$  tritt ein bei Anwendung des Aggregats  $G$ ". Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt nun

$P(A'_1 \cap \dots \cap A'_n) = P(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = P_1(A_1) \cdot \dots \cdot P_n(A_n)$ . Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Zufallsgeneratoren  $G_i$  ist aber  $P(A'_i) = P_i(A_i)$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  und somit  $P(A'_1 \cap \dots \cap A'_n) = P(A'_1) \cdot \dots \cdot P(A'_n)$ .

Angeleitet durch dieses Beispiel definiert man:

### 1. Definition:

Sei  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$  ein W-Raum. Eine definite Folge von schwach-definiten Mengen von Ereignissen  $\mathcal{E}_n$  in  $\mathcal{O}$  heißt unabhängig, wenn für jede nichtleere, endliche Teilmenge  $\{i_1, \dots, i_n\}$  von  $\mathbb{N}$  und jede mögliche Wahl von Ereignissen  $A_i \in \mathcal{E}_{i_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die Gleichung  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_n})$  erfüllt ist.

### 2. Bemerkung:

a) An Hand des in der Einführung gegebenen Beispiels macht man sich leicht klar, daß für  $n$  Ereignisse aus der paarweisen Unabhängigkeit nicht auf die Unabhängigkeit geschlossen werden kann.

b) Die Folge  $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann unabhängig, wenn jede endliche Teilfolge unabhängig ist.

c) Die Unabhängigkeit bleibt bestehen, wenn man jede der Mengen  $\mathcal{E}_n$  verkleinert.

Der nächste Satz zeigt, wie man unabhängige Mengen  $\mathcal{E}_n$  vergrößern kann, ohne die Unabhängigkeit zu verlieren.

### 3. Satz:

Sei  $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite unabhängige Folge von  $\cap$ -stabilen schwachdefiniten Mengen von Ereignissen in einem W-Raum  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$ . Dann ist die definite Folge  $(\mathcal{O}(\mathcal{E}_n))_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig.

#### Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Folge als endlich angenommen werden. Seien also  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$  unabhängig.

Wir zeigen, daß dann  $\mathcal{O}(\mathcal{E}_1), \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  unabhängig sind.

a)  $\{\Omega\}, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  sind unabhängig, denn

$P(\Omega \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(\Omega)P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$  bei beliebiger Wahl der  $A_i \in \mathcal{E}_i$  ( $i=2, \dots, n$ ).

b) Sind  $E, F \in \mathcal{O}$  unabhängig von  $\mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  und gilt  $F \subseteq E$ , so ist auch  $\{E \setminus F\}$  unabhängig von  $\mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ . Denn sind  $A_i \in \mathcal{E}_i$  ( $i=2, \dots, n$ ) beliebig, so gilt:

$$P(E \setminus F \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(E \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) - P(F \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \\ = P(E)P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) - P(F)P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

c) Für je zwei (und damit für je endlich viele) Mengen  $E, F \in \mathcal{O}$ , die unabhängig von  $\mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  sind, ist auch  $\{E \cup F\}$  von  $\mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  unabhängig, denn die Vereinigung kann als disjunkte Vereinigung geschrieben werden wie folgt:  $E \cup F = E \cup (F \setminus E \cap F)$ .  $\{F \setminus E \cap F\}$  ist aber wegen b) und der Durchschnittsstabilität unabhängig von  $\mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ .

Seien also ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $E, F$  disjunkt, dann gilt:  $P(E \cup F \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P((E \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \cup (F \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)) = \\ = P(E)P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) + P(F)P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \\ = (P(E) + P(F))P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = P(E \cup F)P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$  für beliebige  $A_i \in \mathcal{E}_i$  ( $i=2, \dots, n$ ).

d) Mit jeder definiten Folge  $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{O}$ , für die  $\{E_m\}, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  unabhängig ist für jedes  $m \in \mathbb{N}$ , ist auch  $\{\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\}, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  unabhängig.

Die Vereinigung kann nämlich als Vereinigung paarweise disjunkter Mengen durch  $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} E'_{m+1} \setminus E_m$  dargestellt werden, wobei  $E'_0 = \emptyset$  und  $E'_m = E_1 \cup \dots \cup E_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Hierbei geht die Unabhängigkeit wegen b) und c) nicht verloren.

Besteht also die Vereinigung ohne Beschränkung der Allgemeinheit aus paarweise disjunkten Mengen  $E_m$ , so gilt für beliebige Wahl von  $A_i \in \mathcal{E}_i$  ( $i=2, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\right) &= P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} (E_m \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)\right) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P(E_m \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (P(E_m) P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P(E_m) \cdot (P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)) = P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \end{aligned}$$

e) Wegen a), b) und d) ist das System aller Mengen  $E \in \mathcal{O}$ , für die  $\{E\}, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  unabhängig ist, eine  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{E}_1$  umfaßt und damit auch  $\mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{E}_1)$ , woraus die Behauptung folgt wegen Bemerkung 2.c).

Analog zeigt man in endlich vielen Schritten, daß

$\mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{E}_1), \dots, \mathcal{O}_{\sigma}(\mathcal{E}_n)$  unabhängig sind.

#### 4. Korollar:

Sei  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge von unabhängigen schwachdefiniten  $\sigma$ -Unteralgebren in einem  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$  und  $(N_j)_{j \in J}$  eine definite Zerlegung von  $\mathbb{N}$  in paarweise disjunkte Mengen  $N_j$ . Sei dann  $\mathcal{O}_j := \mathcal{O}_{\sigma}\left(\bigcup_{i \in N_j} \mathcal{U}_i\right)$ , so ist auch die definite Folge  $(\mathcal{O}_j)_{j \in J}$  unabhängig.

#### 5. Definition:

Eine definite Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zufallsvariablen (deren Wertebereiche von  $n$  abhängig sein können) auf einem  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$  heißt unabhängig, wenn die definite Folge  $(\mathcal{O}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig ist.

#### 6. Satz: [1] 31.2

Auf einem  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$

seien  $X_1, \dots, X_n$  endlich viele  $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)$ -Zufallsvariable und  $\mathcal{O}_i$  ein  $\cap$ -stabiler Erzeuger von  $\mathcal{O}_i$ , der  $\Omega_i$  enthält.  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  ist genau dann unabhängig, wenn  $P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(O_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i^{-1}(O_i))$  für jede Wahl von Mengen  $O_i \in \mathcal{O}_i$ .

#### Beweis:

$\mathcal{E}_i := \{X_i^{-1}(O_i) : O_i \in \mathcal{O}_i\}$  ist  $\cap$ -stabiler Erzeuger von  $\mathcal{O}(X_i)$  (wegen § 5.5), der  $\Omega$  enthält.

Wegen Satz 3 genügt es,  $P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \cdot \dots \cdot P(E_n)$  für beliebige Wahlen  $E_i \in \mathcal{E}_i$  zu zeigen, was aber klar ist, da geeignete  $E_i := \Omega$  gesetzt werden können.

#### 7. Satz: [1] 31.3

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge von  $(\Omega_n, \mathcal{O}_n)$ -Zufallsvariablen und  $Y_n: \Omega_n \rightarrow \Omega'_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine

$\mathcal{O}_n$ - $\mathcal{O}'_n$ -meßbare Abbildung in einen  $W$ -Meßraum  $(\Omega'_n, \mathcal{O}'_n)$ .

Dann folgt aus der Unabhängigkeit von  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Unabhängigkeit von  $(Y_n \circ X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Beweis:

Für jede Menge  $A' \in \mathcal{O}'_n$  ist  $(Y_n \circ X_n)^{-1}(A') = X_n^{-1}(Y_n^{-1}(A'))$  und somit  $\mathcal{O}(Y_n \circ X_n) \subseteq \mathcal{O}(X_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

Bemerkung 2.c) liefert also die Behauptung.

8. Bemerkung:

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge von  $(\Omega_n, \mathcal{O}_n)$ -Zufallsvariablen auf einem W-Raum  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$ . Sei  $P_{X_n}$  zu  $X_n$  gehörige Verteilung.

Die Produktabbildung  $Y := \bigotimes_{n=1}^{\infty} X_n : \Omega \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  werde dadurch definiert, daß jedem  $\omega \in \Omega$  die Abbildung  $n \mapsto X_n(\omega)$  von  $\mathbb{N}$  in  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  zugeordnet wird.

Dann ist  $Y$  eine  $(\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n)$ -Zufallsvariable, da nach §5.5.b)  $p_n \circ Y = X_n$   $\mathcal{O}$ - $\mathcal{O}_n$ -meßbar ist ( $p_n$  ist die  $n$ -te Projektion).

9. Definition:

In der Situation von 8. heißt die Verteilung  $P_Y = P_{\bigotimes_{n=1}^{\infty} X_n}$  die gemeinsame Verteilung der Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

10. Satz:

Eine definite Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zufallsvariablen ist genau dann unabhängig, wenn  $P_{\bigotimes_{n=1}^{\infty} X_n} = \prod_{n=1}^{\infty} P_{X_n}$ .

Beweis:

a) Sei zuerst  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine endliche Folge von Zufallsvariablen und  $A_i \in \mathcal{O}_i$  für jedes  $1 \leq i \leq n$ .

Dann gilt  $P_Y(\prod_{i=1}^n A_i) = P(Y^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i)) = P(\bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i))$ .

Nach Satz § 11.9 ist  $P_Y$  genau dann das Produktmaß der  $P_{X_i}$ , wenn gilt  $P_Y(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(A_i)$ . Dies ist genau dann erfüllt, wenn

$P(\bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i=1}^n P(X_i^{-1}(A_i))$  für alle  $A_i \in \mathcal{O}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Die Behauptung folgt somit aus Satz 6.

b) Sei nun  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge von Zufallsvariablen.

Wie in § 13 bezeichne wieder  $p_J : \prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n \rightarrow \prod_{n \in J} \Omega_n$  die Projektionsabbildung und  $Y_J : \Omega \rightarrow \prod_{n \in J} \Omega_n$  die Abbildung  $\bigotimes_{n \in J} X_n$  für jede nichtleere endliche definite Teilmenge  $J \subseteq \mathbb{N}$ .

Dann ist  $Y_J = p_J \circ Y$  und somit  $P_{Y_J} = p_J(P_Y)$  wegen § 5.8. Nach Teil a) ist die Unabhängigkeit äquivalent mit  $P_{Y_J} = \prod_{n \in J} P_{X_n}$  für alle nichtleeren endlichen definiten Teilmengen  $J \subseteq \mathbb{N}$ .

§ 13.7 liefert also die Behauptung.

Zur Verwendung in § 16 zitieren wir noch zwei Sätze, deren Beweise wörtlich aus [1] übernommen werden können, da wir alle benötigten Hilfsmittel in den §§ 4,5 und 11 bereitgestellt haben.

**11.Satz:** [1] 32.1

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige reelle Zufallsvariable. Dann gilt  $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$ , wenn entweder alle  $X_i \geq 0$  oder alle  $X_i$  integrierbar sind.

**12.Satz:** [1] 32.3

Für je endlich viele paarweise unabhängige integrierbare reelle Zufallsvariable  $X_1, \dots, X_n$  ist  $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$ .

## § 16. Gesetz der großen Zahlen

Wir beginnen mit einer Definition und einem Satz, die die Formulierung des Gesetzes der großen Zahl erleichtern.

Sei  $(\Omega, \mathcal{O}, P)$  ein beliebiger W-Raum.

### 1. Definition:

Sei  $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge von  $\sigma$ -Unteralgebren von  $\mathcal{O}$  mit definiten Erzeugendensystemen und  $\mathcal{T}_n := \mathcal{O}_\sigma(\bigcup_{m=1}^n \mathcal{O}_m)$ . Dann heißt  $\mathcal{T}_\infty := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{T}_n$  die  $\sigma$ -Algebra der terminalen Ereignisse der Folge  $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 2. Satz:

Sei  $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite unabhängige Folge von  $\sigma$ -Unteralgebren von  $\mathcal{O}$  mit definiten Erzeugendensystemen.

Dann gilt für jedes terminale Ereignis A der Folge entweder  $P(A)=0$  oder  $P(A)=1$ .

### Beweis:

Sei  $A \in \mathcal{T}_\infty$  beliebig. Wir zeigen, daß A unabhängig von A ist, denn dann folgt die Behauptung aus  $P(A)=P(A)^2$ .

Nach § 15.4 ist  $\mathcal{T}_{n+1}$  unabhängig von  $\mathcal{U}_n := \mathcal{O}_\sigma(\mathcal{O}_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $A \in \mathcal{T}_{n+1}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist, ist A unabhängig von  $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n$ .

Da die Folge  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  isoton ist, ist  $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n$   $\cap$ -stabil, also nach Satz § 15.3 A unabhängig von  $\mathcal{O}_\sigma(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n)$ .

Hieraus folgt die Behauptung, da  $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{O}_\sigma(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n)$ .

### 3. Bemerkung:

a) Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite unabhängige Folge in  $\mathcal{O}$ , so gilt  $P(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty A_m) = 0$  oder 1, denn man wende Satz 2 auf die unabhängige Folge  $(\mathcal{O}_\sigma(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$  an, wobei jedes

$\mathcal{O}_\sigma(A_n) = \{\emptyset, \Omega, A_n, A_n^c\}$  erfüllt.

b) Ist  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite unabhängige Folge von Zufallsvariablen, so wird Satz 2 auf die definite Folge  $(\mathcal{O}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  angewendet.

### 4. Definition:

Man sagt, daß eine definite Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  integrierbarer reeller Zufallsvariablen dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) = 0$  P-fast sicher.

### 5. Bemerkung:

Wegen Satz 2 gilt das starke Gesetz der großen Zahl genau dann, wenn  $P(\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) = 0\}) = 1$ , denn ist  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Nullfolge reeller Zahlen, so sei

$$Y_n := r_n \sum_{i=1}^n X_i \text{ und}$$

$$A := \{ \limsup Y_n = 0 \} \cap \{ \liminf Y_n = 0 \}.$$

A liegt wegen § 4.5 und § 4.13 in  $\mathcal{O}$  und es gilt

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=m}^{\infty} \left\{ \sup_{n \geq N} |r_n \sum_{i=1}^n X_i| < \frac{1}{k} \right\} \text{ für jedes } m \in \mathbb{N}, \text{ d.h. } A \text{ ist}$$

terminales Ereignis der Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Damit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch  $(X_n - E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig ist (§ 15.7), besagt obiger Satz 2 für die spezielle Folge  $r_n = \frac{1}{n}$ :

$$P\left(\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) = 0 \right\}\right) = 0 \text{ oder } 1.$$

Der folgende Satz wird bei der Klärung der Frage nach der Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen benutzt.

### 6. Satz: [1] 36.1

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige integrierbare reelle Zufallsvariable und  $r_1 > \dots > r_n > 0$   $n$  reelle Zahlen. Setzt man dann  $S_i := X_1 - E(X_1) + \dots + X_i - E(X_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), so gilt für jedes  $m = 1, \dots, n$  und jedes reelle  $\varepsilon > 0$ :

$$P\left(\left\{ \sup_{m \leq i \leq n} r_i |S_i| > \varepsilon \right\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left( r_m^2 \sum_{j=m}^n V(X_j) + \sum_{j=m+1}^n r_j^2 V(X_j) \right)$$

(hierbei ist  $\sum_{j=m+1}^n r_j = 0$ ).

### Beweis:

Wegen § 14.9 und § 15.7 können alle  $X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) als zentriert angenommen werden und es sei  $V(X_i) < +\infty$ , da sonst nichts zu zeigen ist. Mit den Definitionen

$$A := \left\{ \sup_{m \leq i \leq n} r_i |S_i| > \varepsilon \right\}, A_m := \left\{ r_m |S_m| > \varepsilon \right\} \text{ und}$$

$$A_i := \bigcap_{j=m}^i \left\{ r_j |S_j| > \varepsilon \right\} \quad (i=m+1, \dots, n) \text{ erhält man } P(A) = \sum_{i=m}^n P(A_i).$$

Setzt man noch  $r_{n+1} = 0$  und  $Z := \sum_{i=m}^n (r_i^2 - r_{i+1}^2) S_i^2$ , so ergibt

Satz § 15.12 :

$$E(Z) = r_m^2 \sum_{j=m}^n V(X_j) + \sum_{j=m+1}^n r_j^2 V(X_j).$$

Ist  $Y_i := 1_{A_i}$  ( $i=m, \dots, n$ ), so ist  $Z \geq \sum_{i=m}^n Y_i Z$  und somit

$$E(Z) \geq \sum_{i=m}^n \sum_{j=i}^n (r_j^2 - r_{j+1}^2) E(Y_i S_j^2), \text{ woraus die Behauptung folgt, wenn } E(Y_i S_j^2) \geq \frac{\varepsilon^2}{r_i^2} P(A_i) \quad (m \leq i \leq n, i \leq j \leq n) \text{ gezeigt ist.}$$

Sei hierzu  $i, j$  ein zulässiges Indexpaar und  $U_{ij} := S_j - S_i$ . Dann sind  $Y_i S_i$  und  $U_{ij}$  unabhängig (sogar für  $i=n$ , da dann  $U_{nn} = 0$ ), denn  $Y_i S_i$  ist  $\mathcal{O}(X_1, \dots, X_i)$ -meßbar und  $U_{ij}$  ist

$\mathcal{O}(X_{i+1}, \dots, X_n)$  meßbar ( $i=1, \dots, n-1$ ) und die beiden

$\sigma$ -Algebren sind unabhängig nach Satz § 15.4.

Satz § 15.11 liefert somit  $E(Y_i S_i U_{ij}) = 0$ . Also gilt:

$$E(Y_i S_j^2) = E(Y_i S_i^2) + E(Y_i U_{ij}^2) + 2E(Y_i S_i U_{ij}) \geq E(Y_i S_i^2) = \int_{\mathbb{R}} S_i^2 dP \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon^2}{r_i^2} P(A_i).$$

## 7. Satz: [1] 37.1

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite unabhängige Folge integrierbarer reeller Zufallsvariablen. Gilt dann  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} V(X_n) < +\infty$ , so genügt die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dem starken Gesetz des großen Zahlen.

Beweis:

Sei für  $n \in \mathbb{N}$   $Y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))$  und  $V_n := V(X_n)$ .

Mit  $r_i := i^{-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) folgt aus Satz 6

$P(\{ \sup_{m \leq i \leq n} |Y_i| > \varepsilon \}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} (\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^m V_j + \sum_{j=m+1}^n j^{-2} V_j)$  für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  und je zwei  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq n$ .

Dies ergibt für jedes  $M \leq m$  und  $n \rightarrow \infty$

$P(\{ \sup_{i \geq m} |Y_i| > \varepsilon \}) \leq \varepsilon^{-2} (M^{-2} \sum_{j=1}^M V_j + \sum_{j=M+1}^{\infty} j^{-2} V_j)$ , woraus

$\lim_{m \rightarrow \infty} P(\{ \sup_{i \geq m} |Y_i| > \varepsilon \}) = 0$  folgt, da

$\lim_{m \rightarrow \infty} M^{-2} \sum_{j=1}^M V_j = 0$  für jedes  $M \in \mathbb{N}$  und

$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} j^{-2} V_j = 0$  nach Voraussetzung. Der Beweis von Satz § 6.10 liefert dann die Behauptung.

## 8. Satz: [1] 37.2

Jede definite unabhängige Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  integrierbarer reeller Zufallsvariablen, die alle die gleiche Verteilung besitzen, genügt dem starken Gesetz der großen Zahlen.

Beweis:

Sei  $\mu := P_{X_n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $I_n := ]-n, +n[$ ,

$H_n := \{x \in \mathbb{R} : n-1 \leq x < n\}$  und  $f_n(x) := x \cdot 1_{I_n}(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Dann wird durch  $Y_n := f_n \circ X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) eine definite Folge unabhängiger reeller Zufallsvariablen definiert (§ 15.7), für die Satz 7 gilt. Jedes  $Y_n$  ist als beschränkte Funktion nämlich zwei-fach integrierbar, woraus wegen § 14.8 für die Varianzen  $V(Y_n) \leq E(Y_n^2) = \sum_{i=1}^n \int_{H_i} x^2 \mu(dx)$  und somit

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} V(Y_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{n=i}^{\infty} n^{-2}) (\int_{H_i} x^2 \mu(dx))$  folgt.

Unter Verwendung von  $\sum_{n=i}^{\infty} n^{-2} \leq \frac{2}{i}$  erhält man also

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} V(Y_n) \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_{H_i} |x| \left| \frac{x}{i} \right| \mu(dx) \leq 2 \int |x| \mu(dx) < +\infty$ .

Es existiert also nach Satz 7 ein  $A \in \mathcal{O}$  mit  $P(A) = 1$  und

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i(\omega) - E(Y_i)) = 0$  für jedes  $\omega \in A$ .

Ist  $B := \{ \omega \in \Omega : X_n(\omega) \neq Y_n(\omega) \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N} \}$ , so folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n (E(Y_i) - E(X_i)) = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i(\omega) - E(X_i)) = 0$  für jedes  $\omega \in A \cap B$ .

Denn alle  $X_n$  haben dieselbe Verteilung, woraus mittels § 6.7

$a := \int x \mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Y_n)$  folgt, da  
 $|f_n(x)| \leq |x|$  und  $\int |x| \mu(dx) = E(|X_n|) < +\infty$ .

Dann ist aber auch  $(n^{-1} \sum_{i=1}^n (E(Y_i) - a))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.

Ist also  $B$  ein fast sicheres Ereignis, so ist der Satz bewiesen.

Sei hierzu  $C_n := \{X_n \neq Y_n\}$  und  $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} C_m$ .

Dann ist  $B = \Omega \setminus C \in \mathcal{O}$  und es genügt  $P(C) = 0$  zu beweisen.

Dazu zeigen wir  $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) < +\infty$  (denn aus  $C \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} C_m$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $\sum_{m=n}^{\infty} P(C_m) \geq P(C)$ ).

Nach Definition gilt  $C_n = \{|X_n| > n\}$  und somit

$P(C_n) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(H_j)$ , was

$\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \sum_{j=2}^{\infty} (j-1) \mu(H_j) \leq \sum_{j=2}^{\infty} \int_{H_j} |x| \mu(dx) \leq \int |x| \mu(dx) < E(|X_n|) < +\infty$   
 ( $n \in \mathbb{N}$ ) zur Folge hat.

## Anhang 1

Einführung in die konstruktive Mathematik

Es soll hier nicht der wissenschaftstheoretische Status der konstruktiven Mathematik innerhalb der gesamten Mathematik erläutert werden, sondern nur die verwendete Terminologie kurz beschrieben werden. Für ausführlichere Informationen sei auf [7] und [8] verwiesen.

Die konstruktive Mathematik verwendet die klassische Junktorenlogik, da sich diese durch Widerspruchsfreiheitsbeweise von der konstruktiven Logik aus begründen läßt. Etwas komplizierter ist die Situation beim Gebrauch der Quantoren. Man unterscheidet zwei Sorten: definite Quantoren, wenn der Variabilitätsbereich durch ein Konstruktionsverfahren gegeben ist (z.B.  $\Rightarrow |$  und  $n \Rightarrow n|$ , wobei  $n$  Variable für bereits konstruierte Elemente ist) und indefinite Quantoren, bei denen der Variabilitätsbereich nicht durch ein Konstruktionsverfahren abgegrenzt ist (z.B. "für alle Aussagen"). Definite Quantoren werden wie in der klassischen Quantorenlogik verwendet, indefinite Quantoren dagegen nur konstruktiv, d.h. es gilt nicht die übliche Äquivalenz  $\neg \forall x \neg A(x) \Leftrightarrow \exists x A(x)$  mit einer Aussageform  $A(x)$ , sondern nur der Schluß von  $\exists x A(x)$  auf  $\neg \forall x \neg A(x)$ . Dies wird bei Existenzbeweisen und indirekten Beweisen bedeutsam.

Es ist ein Charakteristikum der konstruktiven Mathematik, daß die Variabilitätsbereiche der Quantoren keine Mengen zu sein brauchen, denn Mengen werden ja erst mit Hilfe des in der Logik fundierten Abstraktionsverfahrens aus Aussageformen gewonnen. Ist der Variabilitätsbereich der freien Variable einer Aussageform definit bzw. indefinit, so heißt die aus der Aussageform abstrahierte Menge definit bzw. indefinit.

Ganz allgemein werden definite Mengen  $M$  durch folgendes Induktionsschema gewonnen:

$n, x_1, \dots, x_m \in M \Leftrightarrow A_M(n, x_1, \dots, x_m)$ , wobei  $n, m \in \mathbb{N}$  und die Formel  $A_M(n, x_1, \dots, x_m)$  das Symbol  $M$  nur in Teilformeln  $s, t_1, \dots, t_m \in M$  mit  $s < n$  ( $s \in \mathbb{N}$ ) enthalten darf.

Eine wichtige Teilklasse der indefiniten Mengen sind die schwachdefiniten Mengen.

Definition:

Eine Menge  $M$  heißt schwachdefinit, wenn es eine definite Teilmenge  $E$  von  $M$  gibt und ein definites Verfahren, das auf definite Teilmengen von  $E$  angewandt die Elemente von  $M$  liefert.

Beispiel:

- a) Sei  $M := \mathbb{R}$  und  $E := \mathbb{Q}$ . Das Verfahren besteht darin, Limiten definiter Cauchy-Folgen rationaler Zahlen zu bilden. (Insbesondere sind die Intervalle in  $\mathbb{R}$  schwachdefinit.)
- b) Sei  $M$  ein separabler metrischer Raum und  $E$  definite Teilmenge von  $M$  mit  $\overline{E} = M$ . Das Verfahren besteht wiederum im Bilden von Limiten definiter Folgen in  $E$ . (Vergl. Anhang 3)
- c) Sei  $E$  definites Mengensystem und  $M = \bigcap_{\alpha} (E)$ . Das Verfahren besteht darin, Vereinigungen definiter Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu bilden, wobei für jedes  $n \in \mathbb{N}$  entweder  $A_n$  oder  $\{A_n\}$  in  $E$  liegt. (Vergl. §1.12)
- d) Sei  $M$  ein Vektorraum über einem Körper und  $E$  definite Basis von  $M$ . Das Verfahren besteht darin, Linearkombinationen zu bilden.

Funktionen werden mittels des Graphen definiert und können daher ebenfalls in definite, schwachdefinite und indefinite Funktionen unterteilt werden.

Eigenschaften definiter bzw. schwachdefiniter Mengen:

- a) Durchschnitte bzw. Vereinigungen definiter Folgen von (schwach-)definiten Mengen sind (schwach-)definit.
- b) Komplemente (schwach-)definiter Mengen bezüglich (schwach-)definiter Mengen sind (schwach-)definit.
- c) Der Durchschnitt einer definiten Menge mit einer schwachdefiniten ist definit.

Eigenschaften definiter bzw. schwachdefiniter Funktionen:

- a) Endliche Summen, endliche Produkte, Differenzen und Quotienten (soweit existent) (schwach-)definiter Funktionen sind (schwach-)definit.
- b) Limiten definiter Folgen (schwach-)definiter Funktionen sind (schwach-)definit.
- c) Die Hintereinanderschaltung zweier (schwach-)definiter Funktionen ist (schwach-)definit.

- d) Ist  $f$  schwachdefinit und  $g$  definit, so ist  $f \cdot g$  definit.  
 e) Ist  $f$  schwachdefinit und  $M$  definite Teilmenge der Argumentmenge von  $f$ , so ist  $f(M)$  definite Menge.  
 f) Die Umkehrabbildung einer schwachdefiniten Funktion (falls überhaupt existent) braucht nicht schwachdefinit zu sein.

Von großem Einfluß auf die Beweise in der Maßtheorie ist die Behandlung des Supremums bzw. Infimums beschränkter Mengen reeller Zahlen. Deshalb folgt hier kurz das Wichtigste über die Behandlung des Supremums in der konstruktiven Mathematik. (Analoges gilt dann auch für das Infimum.)

Ist  $M$  nichtleere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen, so braucht man zur Darstellung des Supremums von  $M$  (wie zur Darstellung einer jeden reellen Zahl) eine definite Folge rationaler Zahlen. Diese Darstellung kann wie folgt aussehen:  $r_n := \frac{T(n)}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), wobei

$T(n)$  der kleinste Index  $m$  ist mit  $x \leq \frac{m}{n}$  für jedes  $x \in M$ .

Die Definition von  $T$  enthält aber einen indefiniten Quantor und somit braucht die Folge  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht definit zu sein.

Um dies zu erreichen, definiert man:

$$L(M) := \{r \in \mathbb{Q} : r < x \text{ für ein } x \in M\}.$$

$L(M)$  heißt die Linksklasse von  $M$ . Es gilt nun folgender

#### Satz:

Ist die Linksklasse  $L(M)$  einer nach oben beschränkten Menge  $M \neq \emptyset$  reeller Zahlen definit, so existiert das Supremum und ist darstellbar als Limes einer definiten Folge rationaler Zahlen. Erfolgt die definite Darstellung von  $L(M)$  durch eine definite Teilmenge  $M'$  von  $M$ , so ist das Supremum sogar Limes einer definiten Folge von Elementen aus  $M$  (genauer sogar aus  $M'$ ).

Für jede definite aufsteigende beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist natürlich der Limes zugleich Supremum der Folgenglieder. Außerdem gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ , falls die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist und der Limes existiert. Hierbei ist  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_{k \in \mathbb{N}} (\inf_{n \geq k} x_n)$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_{k \in \mathbb{N}} (\sup_{n \geq k} x_n)$ .

An die Stelle des Auswahlaxioms tritt in der konstruktiven Mathematik folgender

#### Auswahlsatz:

Ist  $I$  schwachdefinite Menge und existiert für jedes  $i \in I$  ein  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $A(i, r)$  für eine Aussageform  $A(\cdot, \cdot)$ , so existiert

eine schwachdefinite Funktion  $f:I \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $A(i, f(i))$  für jedes  $i \in I$ .

$\mathbb{Q}$  darf durch jede andere definite Menge ( die in einer schwachdefiniten enthalten sein kann ) ersetzt werden. Meist wird  $I = \mathbb{N}$  sein.  $f$  ist dann eine definite Folge.

## Anhang 2

### Einführung in die Ordinalzahltheorie

Für die Definition der von einem Mengensystem erzeugten  $\mathcal{C}$ -Algebra braucht man eine Zahlklasse, die mit jeder definiten isotonen Folge ein Element enthält, das größer ist als alle Folgenglieder (vergl. § 1.14). Die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen erfüllt diese Forderung. Es folgt daher eine kurze Beschreibung, wie man in der konstruktiven Mathematik Ordinalzahlen und speziell abzählbare Ordinalzahlen definiert und wie man das benötigte Ergebnis erhält.

#### 1. Definition:

a) Sei  $M$  eine definite oder indefinite Menge.

Eine definite oder indefinite Relation  $\leq$  auf  $M$  heißt totale Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.  $(M, \leq)$  heißt dann (total-)geordnete Menge.

b) Zwei geordnete Mengen  $(M, \leq)$ ,  $(M', \leq')$  heißen (definit-)ähnlich, wenn ein (definiter) Ordnungsisomorphismus von  $M$  auf  $M'$  existiert, d.h. eine (definite) bijektive Abbildung  $o: M \rightarrow M'$  mit der Eigenschaft:  $x \leq y \Rightarrow o(x) \leq' o(y)$  für alle  $x, y \in M$ .

#### 2. Beispiel:

Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen, geordnet nach zunehmender Größe, ist total geordnete Menge mit definiter Ordnungsrelation.  $\mathbb{N}$ , versehen mit dieser Ordnung, ist definit ähnlich zur definiten Menge aller Primzahlen (wiederum nach zunehmender Größe geordnet).

Wie üblich definiert man den Ordnungstypus  $\mu$  als Repräsentant einer Äquivalenzklasse ähnlicher totalgeordneter Mengen. Hierbei spielt es für die konstruktive Mathematik zunächst keine Rolle, ob die auftretenden Mengen und Relationen definit oder indefinit sind.

Wichtig ist nun folgende

### 3. Definition:

a) Eine geordnete Menge  $(M, <)$  heißt wohlgeordnet, wenn jede Teilmenge von  $M$ , versehen mit der von  $M$  induzierten Ordnung, ein kleinstes Element besitzt.

b) Eine Ordinalzahl  $\mu$  ist ein Ordnungstypus, der durch wohlgeordnete Mengen  $(M, <)$  repräsentiert wird.

$\mu$  heißt abzählbare Ordinalzahl, wenn sowohl  $M$  als auch die Wohlordnung  $<$  definit sind.

### 4. Bemerkung:

Interessant an Definition 3.a) ist, daß die Existenz eines kleinsten Elements für alle Teilmengen von  $M$  gefordert wird und nicht etwa nur für alle schwachdefiniten oder gar definiten Teilmengen.

### 5. Satz:

Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen, nach wachsender Größe geordnet, ist wohlgeordnet.

### Beweis:

Sei  $M$  Teilmenge von  $\mathbb{N}$  und  $N_0 := \{n \in \mathbb{N} : n < m \text{ für alle } m \in M\}$ .

Für  $N_0$  gilt nun:

a)  $1 \in N_0$ , da für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n \neq 1$ .

b) Es existiert  $n_0 \in N_0$  mit  $n_0 + 1 \notin N_0$ , denn

(\*) es existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \notin N_0$  (z.B. für  $m \in M$  gilt  $m+1 \notin N_0$ ), da für alle  $n \in \mathbb{N}$   $n+1 > n$  gilt. Hieraus folgt die Behauptung b). Denn gälte b) nicht, so folgte wegen a) aus dem Prinzip der vollständigen Induktion, daß  $N_0 = \mathbb{N}$  ist im Widerspruch zu (\*).

Es gilt dann:  $n_0 \in M$  und  $n_0 < m$  für alle  $m \in M$ .

Es ist nur noch  $n_0 \in M$  zu zeigen (wegen der Definition von  $N_0$ ).

Sei hierzu  $n_0 \notin M$ , dann ist  $n_0 < m$  für alle  $m \in M$ , also

$n_0 + 1 \leq m$  für alle  $m \in M$ . Das heißt aber  $n_0 + 1 \in N_0$ , im Widerspruch zu b).

### 6. Bemerkung:

Beim Beweis von Eigenschaft b) wird entscheidend von der klassischen Verwendung der definiten Quantoren Gebrauch gemacht.

Die Summe von Ordinalzahlen wird wie folgt definiert.

7. Definition:

a) Sei  $(M_n, \leq_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge paarweise disjunkter geordneter Mengen. Dann wird die geordnete Vereinigung wie folgt definiert: Für je zwei  $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$  sei  $x \leq y$  genau dann, wenn es existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \leq_n y$  oder es existieren  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m < n$  und  $x \in M_m$  und  $y \in M_n$ .

b) Ist  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge von Ordnungstypen, die durch paarweise disjunkte geordnete Mengen  $(M_n, \leq_n)$  repräsentiert werden, so wird die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$  durch die geordnete Vereinigung  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \leq_0)$  repräsentiert.

8. Bemerkung:

a) Sind in der Situation von Definition 7.a) die Mengen  $M_n$  und die Ordnungsrelationen  $\leq_n$  definit, so sind auch  $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$  und  $\leq_0$  definit.

b) Ist  $(M_n, \leq_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine definite Folge von wohlgeordneten Mengen, so ist auch die geordnete Vereinigung wohlgeordnet und repräsentiert somit eine Ordinalzahl.

Zur Einführung einer Ordnungsrelation zwischen Ordinalzahlen benötigt man folgende

9. Definition:

a) Sei  $(M, \leq)$  wohlgeordnet und  $m \in M$ .

$M_m := \{x \in M : x \leq m\}$  heißt der durch  $m$  bestimmte Abschnitt.

Ist  $m$  das kleinste Element von  $M$ , so sei  $M_m = \emptyset$ .

b) Seien  $\mu, \nu$  (abzählbare) Ordinalzahlen wohlgeordneter Mengen  $M, N$ .  $\mu \leq \nu$ , falls  $M$  einem Abschnitt von  $N$  (definit-) ähnlich ist.

10. Bemerkung:

Ist  $M$  definite Menge und  $\leq$  definite Wohlordnung, so ist für jedes  $m \in M$   $M_m$  definit.

11. Satz: [4] § 31.2

Für je zwei Ordinalzahlen  $\mu, \nu$  besteht genau eine der Relationen  $\mu > \nu$ ,  $\mu < \nu$ ,  $\mu = \nu$ .

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun das gewünschte Ergebnis zeigen.

12. Satz: [4] § 32.1 und § 32.3

a) Jede definite Menge von Ordinalzahlen läßt sich als definite aufsteigende (evtl. endliche) Folge schreiben.

b) Zu jeder definiten aufsteigenden Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (abzählbarer) Ordinalzahlen existiert eine eindeutig bestimmte nächstgrößere (abzählbare) Ordinalzahl, wobei die Existenz mit Hilfe von  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$  gezeigt wird.

## Anhang 3

Topologische und metrische Räume§ 1. Grundlegende Definitionen1. Definition:

a) Sei  $E$  definite oder indefinite Menge.

Eine definite oder indefinite Menge  $\mathcal{B}$  ( der Einfachheit halber disjunkt zu  $E$  ) heißt Basis einer Topologie auf  $E$ , wenn  $\mathcal{B}$  Mengensystem nicht-leerer Mengen in  $E$  ist, sodaß mit  $\tau$  als zugehöriger Relation gilt:

1) Zu jedem  $x \in E$  und zu je zwei  $u_1, u_2 \in \mathcal{B}$  mit  $x \tau u_1 \wedge x \tau u_2$  existiert  $u_x \in \mathcal{B}$ , sodaß für jedes  $y \in E$  mit  $y \tau u_x$  gilt  $y \tau u_1 \wedge y \tau u_2$ .

2) Zu jedem  $x \in E$  existiert  $u \in \mathcal{B}$  mit  $x \tau u$ .

$(E, \mathcal{B}, \tau)$  heiße dann ein topologischer Raum. Gilt noch

3) Zu je zwei verschiedenen  $x_1, x_2 \in E$  existieren  $u_1, u_2 \in \mathcal{B}$  mit  $x_1 \tau u_1 \wedge x_2 \tau u_1$  und  $x_2 \tau u_2 \wedge x_1 \not\tau u_2$ , so sagt man  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  erfülle das Trennungsaxiom  $T_1$ .

b) Ist  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  topologischer Raum und  $A$  definite oder indefinite Teilmenge von  $E$ , so heißt  $\mathcal{B}_A := \{A \wedge u : u \in \mathcal{B}\}$  topologische Basis relativ zu  $A$ , wobei die zugehörige Relation  $\tau_A$  definiert wird durch

$x \tau_A (A \wedge u) \Leftrightarrow x \tau A \wedge x \tau u$  für jedes  $x \in E$  und  $u \in \mathcal{B}$ .

$(A, \mathcal{B}_A, \tau_A)$  heißt ein Unterraum von  $(E, \mathcal{B}, \tau)$ .

c) Sei  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  ein topologischer Raum. Für  $u \in \mathcal{B}$  sei  $U := \{x \in E : x \tau u\}$ .

2. Bemerkung:

Es wird wieder wie schon in § 1 die etwas kompliziertere Schreibweise mit der Relation  $\tau$  verwendet, um besser auf die in der konstruktiven Mathematik auftretenden Probleme hinweisen zu können. Sind dann die zusätzlichen Voraussetzungen (vergl. etwa Definition 5 und Definition 12) angegeben, so wird fast durchweg mit der einfacheren Notation wie in Definition 1.c) gearbeitet.

3. Definition:

Sei  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  topologischer Raum,  $M$  Teilmenge von  $E$  und  $x \in E$ .

a)  $x \in \overset{\circ}{M}$ , falls ein  $u \in \mathcal{B}$  existiert mit  $x \tau u$  und  $U \subseteq M$ .

$\overset{\circ}{M}$  heißt der offene Kern von  $M$ .

b)  $M$  heißt offen, wenn  $M = \overset{\circ}{M}$ .

c)  $x \in \overline{M}$ , falls für jedes  $u \in \mathcal{B}$  mit  $x \in u$  gilt:  $u \cap M \neq \emptyset$ .

$\overline{M}$  heißt die abgeschlossene Hülle von  $M$ .

d)  $M$  heißt abgeschlossen, wenn  $M = \overline{M}$ .

#### 4. Bemerkung:

a) Für die Kern- und Hüllenbildung gelten die üblichen Regeln:

$$\overline{\overset{\circ}{M}} = \overset{\circ}{\overline{M}}$$

$$M \subseteq \overline{M}$$

$$M \subseteq N \Rightarrow \overline{M} \subseteq \overline{N}$$

$$\overline{\overline{M}} = \overline{M}$$

$$\overline{\emptyset} = \emptyset$$

$$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$$

$$\overset{\circ}{\overline{M}} = \overset{\circ}{\overline{M}}$$

$$\overset{\circ}{M} \subseteq M$$

$$\overset{\circ}{M} \subseteq \overset{\circ}{N} \Rightarrow \overset{\circ}{M} \subseteq \overset{\circ}{N}$$

$$\overset{\circ}{\overline{M}} = \overset{\circ}{\overline{M}}$$

$$\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$$

$$\overset{\circ}{M \cap N} = \overset{\circ}{M} \cap \overset{\circ}{N}$$

b) Jede offene Menge  $M$  ist Vereinigung von Umgebungen  $u \in \mathcal{B}$ ,

denn für die Menge  $\mathcal{U}$  der Umgebungen  $u \in \mathcal{B}$  mit  $u \subseteq M$  gilt

$M = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u$ . Die Menge  $\mathcal{U}$  kann hierbei definit oder indefinit sein.

Um die üblichen Sätze der Topologie konstruktiv beweisen zu können, braucht man weitere schärfere Forderungen. Dazu die

#### 5. Definition:

a) Ein topologischer Raum  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  heißt definit topologisch, wenn

1) die Basis  $\mathcal{B}$  definit ist,

2) die Relation  $\tau$  schwachdefinit ist,

3)  $E$  schwachdefinit ist.

b) Sei  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  definit-topologischer Raum. Dann heißt eine

Teilmenge  $M$  von  $E$  definit-offen, wenn es eine definite Menge  $\mathcal{U}$

von Umgebungen  $u \in \mathcal{B}$  gibt mit  $M = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u$ .

Weiterhin heiße  $M \subseteq E$  definit-abgeschlossen, wenn das Komplement  $\overline{E \setminus M}$  von  $M$  bezüglich  $E$  definit-offen ist.

#### 6. Beispiel:

Sei  $E := \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{X}^n := \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}^n \text{ mit } p < q\}$ .

Dann wird eine Relation  $\tau$  definiert durch

$x \tau (p, q) \Leftrightarrow p < x < q$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $(p, q) \in \mathcal{X}^n$ .

$(E, \mathcal{X}^n, \tau)$  ist dann definit topologischer Raum (vergl. auch § 2.2.c) in Anhang 3).

#### 7. Bemerkung:

a) Die Forderung 5.a)2) besagt, daß für  $u \in \mathcal{B}$  die Menge  $u$  schwachdefinit ist.

b) Da jede definite Menge (definit-) abzählbar ist, können definit-offene Mengen  $M$  in der Form  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  geschrieben werden mit definiter Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{B}$ .

c) Die Definition von "definit-offen" und "definit-abgeschlossen" ist mit Definition 3 verträglich, es steht also weiterhin Bemerkung 4.a) zur Verfügung.

d) Ist  $(E, \mathcal{S}, \tau)$  definit-topologischer Raum und  $A$  schwachdefinite Teilmenge von  $E$ , so ist  $(A, \mathcal{S}_A, \tau_A)$  definit-topologischer Raum.

Wichtig ist noch folgende

### 8. Definition:

Seien  $(E, \mathcal{S}, \tau)$  und  $(E', \mathcal{S}', \tau')$  definit-topologische Räume und  $f: E \rightarrow E'$  schwachdefinite Abbildung.

a)  $f$  heißt in  $x_0 \in E$  stetig (bezüglich  $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ ), wenn für jedes  $u' \in \mathcal{S}'$  mit  $f(x_0) \in u'$  ein  $u \in \mathcal{S}$  existiert mit  $x_0 \in u$  und  $f(u) \subseteq u'$ .

b)  $f$  heißt stetig auf  $E$  (bezüglich  $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ ), wenn  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in E$  stetig ist.

### 9. Bemerkung:

a) Man kann die Stetigkeit auch für beliebige topologische Räume  $(E, \mathcal{S}, \tau)$  und  $(E', \mathcal{S}', \tau')$  und beliebige Abbildungen  $f: E \rightarrow E'$  definieren, da aber später nur definit-topologische Räume betrachtet werden, wurde hierauf verzichtet.

b) Seien  $(E, \mathcal{S}, \tau)$  und  $(E', \mathcal{S}', \tau')$  definit-topologische Räume und  $f: E \rightarrow E'$  stetige schwachdefinite Abbildung, dann ist  $f$  in  $x_0 \in E$  genau dann stetig, wenn für jede in  $E'$  definit-offene Menge  $O'$  mit  $f(x_0) \in O'$  eine in  $E$  definit-offene Menge  $O$  existiert mit  $x_0 \in O$  und  $f(O) \subseteq O'$ .

Denn sei  $f$  stetig in  $x_0 \in E$  und  $O'$  definit-offene Teilmenge von  $E'$  mit  $f(x_0) \in O'$ . Wegen Bemerkung 7.b) gilt  $O' = \bigcup_{n=1}^{\infty} U'_n$  mit definiter Folge  $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{S}'$ . Somit existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $f(x_0) \in U'_{n_0}$ . Zu diesem  $U'_{n_0}$  existiert aber wegen der

Stetigkeit die gewünschte definit-offene Menge  $O \subseteq E$ .

Gilt umgekehrt obige Bedingung (x) und ist  $u' \in \mathcal{S}'$  mit  $f(x_0) \in u'$ , so ist  $U'$  definit-offen. Also existiert eine in  $E$  definit-offene Menge  $O$  mit  $x_0 \in O$  und  $f(O) \subseteq U'$ .  $O$  hat aber die Form  $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  mit definiter Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{S}$ . Somit existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_0 \in U_{n_0}$  und da  $U_{n_0} \subseteq O$  ist, gilt auch  $f(U_{n_0}) \subseteq U'$ .

c) Es gilt im allgemeinen nicht, daß Urbilder (bezüglich einer stetigen Funktion  $f: E \rightarrow E'$ ) in  $E'$  definit-offener Mengen  $O'$  in  $E$  definit-offen sind, da bei der Darstellung  $f^{-1}(O') = \bigcup_{x \in f^{-1}(O')} U_x$  (wobei die offene Teilmenge  $U_x$  in  $E$  mit Hilfe der Stetigkeit so bestimmt wird, daß  $x \in U_x$  und

$f(U_X) \leq 0'$  gilt) die Vereinigung im allgemeinen nicht definit ist. Eine definite Darstellung dieser Vereinigung läßt sich aber z.B. in metrischen Räumen mit Hilfe der Separabilität erreichen (vergl. §2.2.h) in Anhang 3).

#### 10. Definition:

- a) Seien  $(E, \mathcal{B}, \cdot)$  und  $(E', \mathcal{B}', \tau')$  definit-topologische Räume. Eine schwachdefinite Abbildung  $f: E \rightarrow E'$  heißt eine Homöomorphie, wenn  $f$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind.
- b) Seien  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  und  $(E, \mathcal{B}', \tau')$  zwei definit-topologische Räume mit gleicher Grundmenge  $E$ . Man sagt  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$  erzeugen dieselbe Topologie auf  $E$ , wenn die Identität von  $E$  in  $E$  eine Homöomorphie ist.

#### 11. Bemerkung:

Die Definition des offenen Kerns und der abgeschlossenen Hülle und auch der Begriff der Stetigkeit einer schwachdefiniten Funktion hängen nur von der Topologie ab.

Um mit definit-offenen und definit-abgeschlossenen Mengen in definit-topologischen Räumen so rechnen zu können wie gewohnt, benötigt man noch folgende

#### 12. Definition:

Sei  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  definit-topologischer Raum.

Die Basis  $\mathcal{B}$  heißt ordnungsdefinit, wenn die Ordnung  $\leq$  von  $\mathcal{B}$ , die für  $u, v \in \mathcal{B}$  durch  $u \leq v \Leftrightarrow \exists x \tau u \Rightarrow x \tau v$  (für beliebiges  $x \in E$ ) definiert wird, eine definite Relation ist.

#### 13. Satz: [8] 24.1

Sei  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  ordnungsdefiniter definit-topologischer Raum. Dann ist die abgeschlossene Hülle einer definit-offenen Menge definit-abgeschlossen.

#### Beweis:

Sei  $M$  definit-offen in  $E$ . Also existiert eine definite Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{B}$  mit  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ . Gesucht ist eine definite Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{B}$  mit  $\overline{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ . Hierfür genügt es zu zeigen, daß die Menge  $\{v \in \mathcal{B} : v \subseteq \overline{M}\}$  definit ist. Dies folgt aber aus

$$v \subseteq \overline{M} \Leftrightarrow \{v \supseteq \overline{M} \Leftrightarrow \{v \supseteq M \Leftrightarrow v \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow v \cap U_n \neq \emptyset \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_n \not\subseteq v \text{ oder } U_n \not\subseteq v \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und jedes } u \in \mathcal{B}.$$

14. Bemerkung:

Für ordnungsdefinite definit-topologische Räume  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  kann man z.B. zeigen, daß jeder reguläre  $T_1$ -Raum zu einer Teilmenge von  $[0, 1]^{\mathbb{N}}$  homöomorph ist und somit metrisierbar und separabel (zum Beweis vergl. [8] 24.4). Hierbei heißt  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  regulär, wenn es eine definite Funktion gibt, die jedem  $u \in \mathcal{B}$  eine definite Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{B}$  zuordnet mit  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$ . Zur Definition von "metrisierbar" vergleiche man § 2.1.c) in Anhang 3. Die Separabilität wird wie folgt definiert.

15. Definition:

Sei  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  ein topologischer Raum.

$E$  heißt separabel, wenn eine definite Teilmenge  $D$  von  $E$  existiert mit  $\overline{D} = E$ .

16. Bemerkung:

a) Ein topologischer Raum  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  mit definiter Basis ist genau dann separabel, wenn zu jedem  $u \in \mathcal{B}$  ein definit gegebenes  $x_u \in E$  existiert mit  $x_u \in U$ . Denn sei  $E$  separabel,  $D$  definite Teilmenge von  $E$  mit  $\overline{D} = E$ ,  $u \in \mathcal{B}$  und  $x \in U$ . Dann ist  $x \in E = \overline{D}$ , d.h. für jedes  $u \in \mathcal{B}$  mit  $x \in U$  gilt  $U \cap D \neq \emptyset$ . In  $D$  existieren aber nur definit gegebene Elemente.

Existiert umgekehrt in jedem  $u \in \mathcal{B}$  ein definites  $x_u \in E$ , so setze man  $D := \{x_u : u \in \mathcal{B}\}$ .  $D$  ist dann definite Teilmenge von  $E$  und es gilt  $E = \overline{D}$ . Denn sei  $x \in E$  und  $u \in \mathcal{B}$  mit  $x \in U$ . Dann ist  $U \cap D \supseteq \{x_u\} \neq \emptyset$ , woraus die Behauptung folgt.

b) Im Unterschied zur axiomatischen Mathematik folgt hier aus der Existenz einer definiten Basis  $\mathcal{B}$  in einem topologischen Raum  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  im allgemeinen nicht die Separabilität, denn zur Wahl eines Elementes  $x_u$  in jedem  $u \in \mathcal{B}$  wird das Auswahlaxiom benötigt und somit entsteht nur dann eine definite Teilmenge in  $E$ , wenn jedes  $u \in \mathcal{B}$  schwachdefinit ist, denn dann ist der Auswahlatz aus Anhang 1 anwendbar.

c) Das in Bemerkung 14 erwähnte Ergebnis zeigt, daß in der konstruktiven Mathematik separable metrische Räume auf natürliche Weise auftreten.

## § 2. Metrische Räume

### 1. Definition:

a) Das Paar  $(E, d)$  heißt metrischer Raum, wenn  $E$  schwachdefinite Menge und  $d$  schwachdefinite reelle Funktion auf  $E \times E$  ist mit folgenden Eigenschaften:

- 1)  $d(x, y) \geq 0$  für je zwei  $x, y \in E$ ;
- 2)  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$  ( $x, y \in E$ );
- 3)  $d(x, y) = d(y, x)$  für je zwei  $x, y \in E$ ;
- 4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  für alle  $x, y, z \in E$ .

b) Für jeden Punkt  $x \in E$  eines metrischen Raumes  $(E, d)$  und jedes  $r \in \mathbb{R}_+^*$  definiere man die offene bzw. abgeschlossene Kugel  $K_r(x)$  bzw.  $K'_r(x)$  um  $x$  mit Radius  $r$  und die zugehörige Relation  $\tau$  durch  $y \tau K_r(x) \Leftrightarrow d(x, y) < r$  bzw.

$$y \tau K'_r(x) \Leftrightarrow d(x, y) \leq r.$$

c) Ein definit topologischer Raum  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  heißt metrisierbar, wenn es eine Metrik auf  $E$  gibt, sodaß das System  $\{K_r(x) : x \in E, r \in \mathbb{R}_+^*\}$  die gleiche Topologie erzeugt wie  $\mathcal{B}$ .

d) Eine definite Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(E, d)$  heißt konvergent gegen  $x \in E$ , wenn für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $d(x_n, x) < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ .

e) Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes  $E$  heißt beschränkt, wenn ein  $x \in E$  und  $r \in \mathbb{R}_+^*$  existieren mit  $A \subseteq K_r(x)$ .

### 2. Bemerkung:

a) Im Hinblick auf die Anwendungen wurde in Definition 1.a) auf indefinite Mengen  $E$  und indefinite Metriken  $d$  verzichtet.

b) Ist  $(E, d)$  metrischer Raum, so ist  $\mathcal{B} = \{K_r(x) : x \in E, r \in \mathbb{R}_+^*\}$  eine Basis einer Topologie auf  $E$ . Sie heißt die topologische Basis des metrischen Raumes  $(E, d)$  und liegt allen topologischen Betrachtungen zu Grunde.

c) Ist  $(E, d)$  separabler metrischer Raum, so existiert eine definite und ordnungsdefinite Basis. Sei hierzu  $D$  definite

Teilmenge von  $E$  mit  $\overline{D} = E$ . Man zeigt wie üblich, daß  $\mathcal{B}_d := \{K_q(x) : x \in D, q \in \mathbb{Q}_+^*\}$  definite Basis ist, welche dieselbe Topologie erzeugt wie  $\mathcal{B}$  aus b). Die Ordnungsdefinitheit ergibt sich aus der Tatsache, daß für je zwei Kugeln  $K_1, K_2$  in  $E$   $K_1 \subseteq K_2$  genau dann gilt, wenn  $K_1 \cap D \subseteq K_2$ .

In separablen metrischen Räumen wird immer diese Basis betrachtet werden. Außerdem heiße "offen" bzw. "abgeschlossen" ( selbst wenn dies nicht immer erwähnt wird ) jeweils "definit-offen" bzw. "definit-abgeschlossen".

d) Ist  $(E, d)$  separabler metrischer Raum,  $D$  definite Teilmenge von  $E$  mit  $\overline{D} = E$ , so existiert zu jedem  $x \in E$  eine definite Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

e) Sind  $E, E'$  metrische Räume und  $f: E \rightarrow E'$  schwachdefinite stetige Funktion, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  für jede definite Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

f) Sei  $E$  separabler metrischer Raum und  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte stetige schwachdefinite Funktion ( d.h.  $f(E)$  ist beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , wobei  $\mathbb{R}$  wie immer mit der vom System

$\{K_r(q) : q \in Q, r \in Q_+^*\}$  erzeugten Topologie versehen sei).

Dann existieren  $\sup_{x \in E} f(x)$  und  $\inf_{x \in E} f(x)$ .

Denn sei  $D$  definite Teilmenge von  $E$  mit  $\overline{D} = E$ , dann gilt für das Supremum:  $\sup_{x \in E} f(x) = \sup_{x \in D} f(x)$ .  $\sup_{x \in D} f(x)$  existiert, da  $\{f(x) : x \in D\}$  definite Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist ( $f$  ist ja schwachdefinit) und gälte  $\sup_{x \in D} f(x) < f(y)$  für ein  $y \in E \setminus D$ , so existierte wegen der Separabilität und wegen e) ein  $x_0 \in D$  mit  $\sup_{x \in D} f(x) < f(x_0)$ .

Den Beweis für das Infimum fhrt man analog.

g) Sei  $(E, d)$  metrischer Raum,  $x \in E$  und  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . Dann gilt  $K_r(x) = \bigcup_{\gamma \gamma q \in Q_+^*} K'_\gamma(x) = \bigcup_{\gamma \gamma q \in Q_+^*} K_\gamma(x)$ . Dies folgt aus der Archimedizität von  $\mathbb{R}$  ( für einen konstruktiven Beweis der archimedischen Eigenschaft von  $\mathbb{R}$  vergleiche man [7] S.58 ).

Insbesondere ist die Vereinigung definit, also ist  $E$  regulär und jede offene Menge ist  $F_\sigma$ -Menge.

h) Jede abgeschlossene Kugel in einem separablen metrischen Raum ist definit-abgeschlossen. Dies zeigt man wie üblich, wobei für die definite Darstellung die Separabilität und die Ordnungsdefinitheit ausgenutzt wird.

i) Seien  $E, E'$  metrische Räume und  $f: E \rightarrow E'$  stetige schwachdefinite Abbildung. Ist dann  $E$  separabel, so ist jedes Urbild einer in  $E'$  definit-offenen bzw. definit-abgeschlossenen Menge  $V$  definit-offen bzw. definit-abgeschlossen in  $E$ .

Für den die offenen Mengen betreffenden Teil der Behauptung

genügt es, wegen des Verhaltens der inversen Mengenabbildung, im Beweis V als offene Kugel in  $E'$  anzunehmen.

Sei also  $V := K_{r'}(y)$  ( $y \in E', r' \in \mathbb{Q}_+^*$ ) und  $D$  definite Teilmenge in  $E$  mit  $\overline{D} = E$ . Dann gilt

$f^{-1}(V) = \bigcup \{ K_r(x) : x \in D, r \in \mathbb{Q}_+^* \text{ mit } f(K_r(x)) \subseteq K_{r'}(y) \text{ für ein } q < r' \text{ (} q \in \mathbb{Q}_+^* \text{)} \}$ , denn jedes  $z \in f^{-1}(V)$  liegt wegen der Stetigkeit von  $f$  und der Separabilität in einer Kugel  $K_r(x)$  ( $x \in D, r \in \mathbb{Q}_+^*$ ) mit  $f(K_r(x)) \subseteq K_{r'}(y)$  ( $q < r'$ ).

Die Vereinigung ist definit, da die Bedingung  $f(K_r(x)) \subseteq K_{r'}(y)$  definit ist. Es ist nämlich  $f(K_r(x)) \subseteq K_{r'}(y) \Leftrightarrow f(D \cap K_r(x)) \subseteq K_{r'}(y)$  wegen der Abgeschlossenheit von  $K_{r'}(y)$ .

### 3. Definition:

Sei  $(E, d)$  metrischer Raum,  $A$  separabler Unterraum von  $E$  und  $x \in E$ , dann werde definiert:

$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$ , ist  $A = \emptyset$ , so sei  $d(x, A) = 0$ .

### 4. Bemerkung:

a) In der Situation von Definition 3 existiert das Infimum, da  $\{d(x, y) : y \in A\}$  nach unten beschränkt ist und wegen der Separabilität von  $A$   $d(x, A) = \inf_{y \in D} d(x, y)$  gilt, wobei  $D$  definite Teilmenge von  $A$  mit  $\overline{D} = A$  ist.

b) Ist  $(E, d)$  metrischer Raum und  $A$  separable Teilmenge von  $E$ , so zeigt man wie üblich mit Hilfe der Dreiecksungleichung, daß  $d(\cdot, A)$  gleichmäßig stetige reelle schwachdefinite Abbildung auf  $E$  ist im Sinne folgender Definition:

Seien  $(E, d)$  und  $(E', d')$  metrische Räume und  $f: E \rightarrow E'$  schwachdefinite Abbildung.  $f$  heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  ein  $\delta \in \mathbb{Q}_+^*$  gibt, sodaß  $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$  gilt für alle  $x, y \in E$  mit  $d(x, y) < \delta$ .

c) Sei  $A$  separable Teilmenge eines metrischen Raumes  $E$  und  $x \in E$ , dann ist  $d(x, A) = 0$  genau dann, wenn  $x \in \overline{A}$ . Denn ist  $d(x, A) = 0$  und existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $K_{\frac{1}{n_0}}(x) \cap A = \emptyset$ , so gilt  $d(x, y) \geq \frac{1}{n_0}$  für jedes  $y \in A$ , was  $d(x, A) \geq \frac{1}{n_0}$  zur Folge hat, im Widerspruch zur Voraussetzung. Ist umgekehrt  $x \in \overline{A}$  und  $d(x, A) = \varepsilon > 0$ , so gilt  $K_{\varepsilon/2}(x) \cap A = \emptyset$  und somit  $x \notin \overline{A}$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

d) Ist  $(E, d)$  separabler metrischer Raum und  $x \in E$ , so existiert für jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge  $M$  von  $E$   $d(x, M)$ .

e) Ist  $A$  separable beschränkte Teilmenge eines metrischen Raumes, so existiert  $\mathcal{S}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ .

Falls  $A = \emptyset$ , so sei  $\mathcal{S}(A) = 0$ .

f) Ist  $(E,d)$  separabler metrischer Raum, so kann man annehmen, daß  $\mathcal{S}(E) \leq 1$ , denn die Metrik  $d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$  ( $x,y \in E$ ) liefert die gleiche Topologie wie  $d$ .

g) Sei  $(E,d)$  separabler metrischer Raum. Dann existiert zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen  $A_1, A_2$  in  $E$  eine stetige schwachdefinite reelle Funktion  $f$  mit  $0 \leq f \leq 1$ ,  $f(x) = 0$  für alle  $x \in A_1$  und  $f(x) = 1$  für alle  $x \in A_2$ .

Mit Hilfe von b) und c) zeigt man, daß

$f(x) := \frac{d(x, A_1)}{d(x, A_1) + d(x, A_2)}$  ( $x \in E$ ) die Behauptung erfüllt.

$f$  heißt auch Urysohn-Funktion.

### 5. Definition:

a) Eine definite Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(E,d)$  heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq n_0$ .

b) Ein metrischer Raum  $E$  heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in  $E$  konvergiert.

c) Ein definit topologischer Raum heißt polnisch, wenn er vollständig metrisierbar und separabel ist.

### 6. Bemerkung:

Ist  $E$  vollständiger metrischer Raum, so heißt dies nur, daß man zu jeder Cauchy-Folge einen Limes konstruieren kann, nicht, daß es einen definiten Term gibt, der alle Limiten von Cauchy-Folgen in  $E$  darstellt. Man vergleiche hierzu die entsprechenden Bemerkungen in [7] S.63.

### 7. Definition:

a) Ein definit-topologischer Raum  $(E, \mathcal{B}, \tau)$  heißt kompakt, wenn jede definite Folge  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Umgebungen aus  $\mathcal{B}$  mit der Eigenschaft  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  (kurz: jede definite Umgebungsüberdeckung von  $E$ ) eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

b) Ein metrischer Raum  $(E,d)$  heißt präkompakt, wenn es eine definite Funktion  $P$  gibt, die jedem  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  ein System  $K_1, \dots, K_n$  von Kugeln aus  $\mathcal{B}$ , alle mit Radius  $< \varepsilon$  zuordnet, sodaß  $E = \bigcup_{i=1}^n K_i$  gilt.

### 8. Satz:

Sei  $(E,d)$  präkompakter und vollständiger metrischer Raum. Dann ist  $E$  kompakt.

Zum Beweis vergleiche man [8] 24.6 und [16].

### 9. Bemerkung:

a) Jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  eines vollständigen metrischen Raumes  $E$  ist vollständig.

Sei hierzu  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge in  $A$ , also ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch Cauchy-Folge in  $E$ . Da  $E$  nach Voraussetzung vollständig ist, konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen ein  $a \in E$ , d.h.

zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_n, a) < \varepsilon$  für alle  $n > n_0$ , somit existiert zu jedem  $r \in \mathbb{Q}_+^*$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in K_r(a)$  für alle  $n > n_0$ . Also gilt  $K_r(a) \cap A \neq \emptyset$  für alle  $r \in \mathbb{Q}_+^*$ . Also liegt wegen Definition 3 aus § 1 in Anhang 3  $a$  in  $\overline{A}$ , woraus die

Behauptung folgt, da  $A$  als abgeschlossen vorausgesetzt war.

b) Sei  $E$  kompakter separabler metrischer Raum und  $A$  abgeschlossene Teilmenge von  $E$ . Dann ist  $A$  kompakt.

Sei hierzu  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Umgebungsüberdeckung (in  $\mathcal{B}_d$ ) von  $A$ . Da  $\bigcup A$  offen ist, existiert eine definite Folge  $(U'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Umgebungen  $U'_n$  aus  $\mathcal{B}_d$  mit  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} U'_n$ . Somit ist die aus den Folgen  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(U'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zusammengesetzte definite Folge  $\mathcal{F}$  eine definite Umgebungsüberdeckung von  $E$ . Da  $E$  kompakt ist, besitzt  $\mathcal{F}$  eine endliche Teilüberdeckung  $\mathcal{F}'$ . Somit ist die Menge aller  $U_n$ , die in  $\mathcal{F}'$  liegen, eine endliche Überdeckung von  $A$ .

c) Sei  $E$  separabler metrischer Raum und  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge kompakter Mengen in  $E$ . Gilt dann  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$  für alle  $p \in \mathbb{N}$ , so ist  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ .

Zum Beweis kann man  $E$  als kompakt annehmen. Mit  $U_n := \bigcup K_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt dann aus der Voraussetzung  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq E$  für alle  $p \in \mathbb{N}$ . Da die  $U_n$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit in  $\mathcal{B}_d$  liegen, ist somit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine definite Umgebungsüberdeckung von  $E$ , woraus  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$  folgt.

d) Seien  $E, F$  separable metrische Räume und  $f: E \rightarrow F$  schwachdefinite stetige Surjektion. Ist dann  $E$  kompakt, so auch  $F$ . Denn ist  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Umgebungsüberdeckung von  $F$ , so ist  $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(U_n)$ . Da  $E$  kompakt ist, existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} f^{-1}(U_i)$ . Also ist  $F = f(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} f f^{-1}(U_i) = \bigcup_{i=1}^{n_0} U_i$ .

e) Jede (schwachdefinite) kompakte Teilmenge  $K$  eines separablen metrischen Raumes  $E$  ist definit abgeschlossen.

Denn ist jedes  $x \in K$  innerer Punkt von  $\bigcup K$ , so ist wegen der Separabilität  $\bigcup K$  definit offen. Sei also  $x \in \bigcup K$  und  $D$  definite Teilmenge von  $K$  mit  $\overline{D} = K$ . Zu  $d \in D$  und  $x$  existieren dis-

junkte Umgebungen  $U_d, V_d$  mit  $x \in U_d$  und  $d \in V_d$ . Dann ist  $\bigcup_{d \in D} V_d$  definite Umgebungsüberdeckung von  $K$ , die also eine endliche Teilüberdeckung  $\bigcup_{i=1}^n V_{d_i}$  besitzt. Somit leistet  $U := \bigcap_{i=1}^n U_{d_i}$  das Verlangte.

# 10. Satz:

Sei  $(E_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge separabler vollständiger metrischer Räume. Dann existiert auf  $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$  eine Metrik  $d$ , sodaß  $(\prod_{n=1}^{\infty} E_n, d)$  ein separabler vollständiger metrischer Raum ist.

## Beweis:

a) Seien  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Elemente aus  $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Dann wird durch  $d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$  eine Metrik  $d$  auf  $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$  definiert bezüglich der  $(\prod_{n=1}^{\infty} E_n, d)$  vollständig ist.

b) Wir zeigen die Vollständigkeit:

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge in  $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$  und sei  $x_n := (x_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann existiert für  $m' \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  mit  $1 - 2^{m'} \varepsilon > 0$  ein  $n' \in \mathbb{N}$ , sodaß  $d(x_{n'}, x_k) < \varepsilon$  für alle  $k > n'$ .

Dann ist auch  $\frac{d(x_{n'm'}, x_{km'})}{1 + d(x_{n'm'}, x_{km'})} < 2^{m'} \varepsilon$ , was

$d(x_{n'm'}, x_{km'}) < \frac{2^{m'}}{1 - 2^{m'} \varepsilon} = \left( \frac{1}{2^{m'} \varepsilon} - 1 \right)^{-1}$  zur Folge hat.

Da  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  beliebig war, folgt hieraus, daß  $(x_{nm'})_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge ist; da  $E_m$  vollständig ist, konvergiert also  $(x_{nm'})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $E_m$ . Da  $m' \in \mathbb{N}$  beliebig war, ist somit die Behauptung gezeigt.

c)  $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$  ist separabel:

Sei hierzu für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $D_n$  definite Teilmenge von  $E_n$  mit  $\overline{D_n} = E_n$  und  $x_n \in D_n$  fest gewählt.

$D := \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : y_n \in D_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und es existiert ein } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } y_n = x_n \text{ für jedes } n \geq n_0\}$  ist definite Teilmenge von  $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$  und es gilt  $\overline{D} = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Denn sei  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$  beliebig und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $2^{-n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n$  beliebig. Dann existiert nach Voraussetzung für jedes  $n \leq n_0$  ein  $y_n \in D_n$  mit  $\frac{d(z_n, y_n)}{1 + d(z_n, y_n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Somit liegt die Folge  $y = (y_1, \dots, y_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots)$  in  $D$  und es gilt

$$\begin{aligned} d(z, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_1(z_i, y_i)}{1 + d_1(z_i, y_i)} = \sum_{i=1}^{n_0} 2^{-i} \frac{d_1(z_i, y_i)}{1 + d_1(z_i, y_i)} + \\ &+ \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_1(z_i, x_i)}{1 + d_1(z_i, x_i)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

**11. Satz:**

Ist  $(E_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definite Folge präkompakter metrischer Räume mit  $d(E_n) < 1$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $(\prod_{n=1}^{\infty} E_n, d)$  präkompakt, wobei  $d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$  für  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ .

**Beweis:** Sei  $x \in Q_+$  beliebig und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $2^{-n_0} < \frac{\epsilon}{2}$ .

Nach Voraussetzung existieren für jedes  $m \leq n_0$  endlich viele Punkte  $x_{mk_1}, \dots, x_{mk_m}$  mit  $E_m = \bigcup_{i=1}^m K(x_{mk_i})$ .

Für  $n > n_0$  sei  $x_n \in E_n$  beliebig. ( $E_n$  ist separabel!)

Sei  $Y_{n_0}$  die endliche Menge aller Folgen  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei

$y_n = x_{nj_n}$  ( $n \leq n_0, j_n \leq k_n$ ) und  $y_n = x_n$  für  $n > n_0$ .

Ist dann  $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n$  beliebig, so existiert  $y \in Y_{n_0}$  mit  $d(y, z) = \sum_{m=1}^{n_0} 2^{-m} d_m(x_{mj_m}, z_m) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, z_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

**12. Satz:**

Sei  $(E, d)$  separabler metrischer Raum und  $E'$  schwachdefinite Teilmenge von  $E$ , die zu einem vollständigen metrischen Raum  $(E_1, d_1)$  homöomorph ist. Dann ist  $E'$   $G_\delta$ -Menge in  $E$ .

**Beweis:**

Sei  $f: E_1 \rightarrow E'$  die nach Voraussetzung existierende Homöomorphie. Auf  $E'$  kann man eine Metrik  $d'$  durch  $d'(x', y') = d_1(f^{-1}(x'), f^{-1}(y'))$  definieren, bezüglich der  $E'$  vollständig ist. Nach Voraussetzung erzeugen  $d'$  und  $d$  dieselbe Topologie auf  $E'$ , also existiert für jedes  $x \in E'$  und  $n \in \mathbb{N}$  eine Zahl  $q_n(x) \in Q_+$  mit  $q_n(x) < \frac{1}{n}$  und  $d'(x, y) < \frac{1}{n}$ , falls  $d(x, y) < q_n(x)$  ( $y \in E'$  beliebig).

Sei  $D$  definite Teilmenge von  $E'$  mit  $\overline{D} = E$ .

Für jedes  $x \in D$  und  $n \in \mathbb{N}$  setze man

$U_n(x) := \{y \in E : d(x, y) < q_n(x)\}$  und  $O_n := \bigcup_{x \in D} U_n(x)$ .

Jedes  $U_n(x)$  und somit auch jedes  $O_n$  ist offen in  $E$ .

Somit ist  $O := \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$   $G_\delta$ -Menge in  $E$ .

Zu zeigen bleibt:  $O = E'$ .

Ist  $y \in E'$ , so existiert zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x \in D$  mit  $y \in U_n(x)$ .

Ist umgekehrt  $y \in O$  und  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $y \in O_n$ , woraus die Existenz eines  $x_n \in D$  folgt mit  $y \in U_n(x_n)$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt also  $d(x_n, y) < \frac{1}{n}$  (da  $q_n(x_n) < \frac{1}{n}$ ) und somit  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

## L e b e n s l a u f

Am 2.Juli 1948 wurde ich, Georg Christian Weippert, als erstes von drei Kindern des Universitätsprofessors Dr.Georg Weippert und seiner Ehefrau Helga, geb.Kowalewsky in Erlangen geboren. Ich gehöre der ev.-luth.Kirche an.

Von September 1954 an besuchte ich vier Jahre lang die Volksschule und bestand 1958 die Aufnahmeprüfung für das Gymnasium Fridericianum Erlangen. Hier legte ich im Sommer 1968 die Reifeprüfung ab. Noch während meiner Schulzeit verstarb am 13.Juli 1965 mein Vater.

Seit dem Wintersemester 1968/69 studiere ich an der Universität Erlangen-Nürnberg Mathematik, wobei ich u.a. Vorlesungen der Herren Professoren H.Bauer, K.Jacobs und W.Specht besuchte, aber auch Logik und Grundlagen der Mathematik bei Professor P.Lorenzen hörte. Im Mai 1971 machte ich die Vordiplom-Prüfung und am 9.Mai 1974 die Hauptdiplom-Prüfung, zu der ich eine Arbeit über "Das gewichtete Approximations-Problem im beschränkten Fall" einreichte.

Als Stipendiat nach dem Graduiertenförderungsgesetz bin ich seit dem Herbst 1974 Doktorand bei Professor Dr.H.Bauer.

Am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg bin ich seit dem Sommersemester 1970 zuerst als studentische und seit der Diplom-Prüfung als wissenschaftliche Hilfskraft beschäftigt.







## **Offsetdruck-Fotodruck**

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990